



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

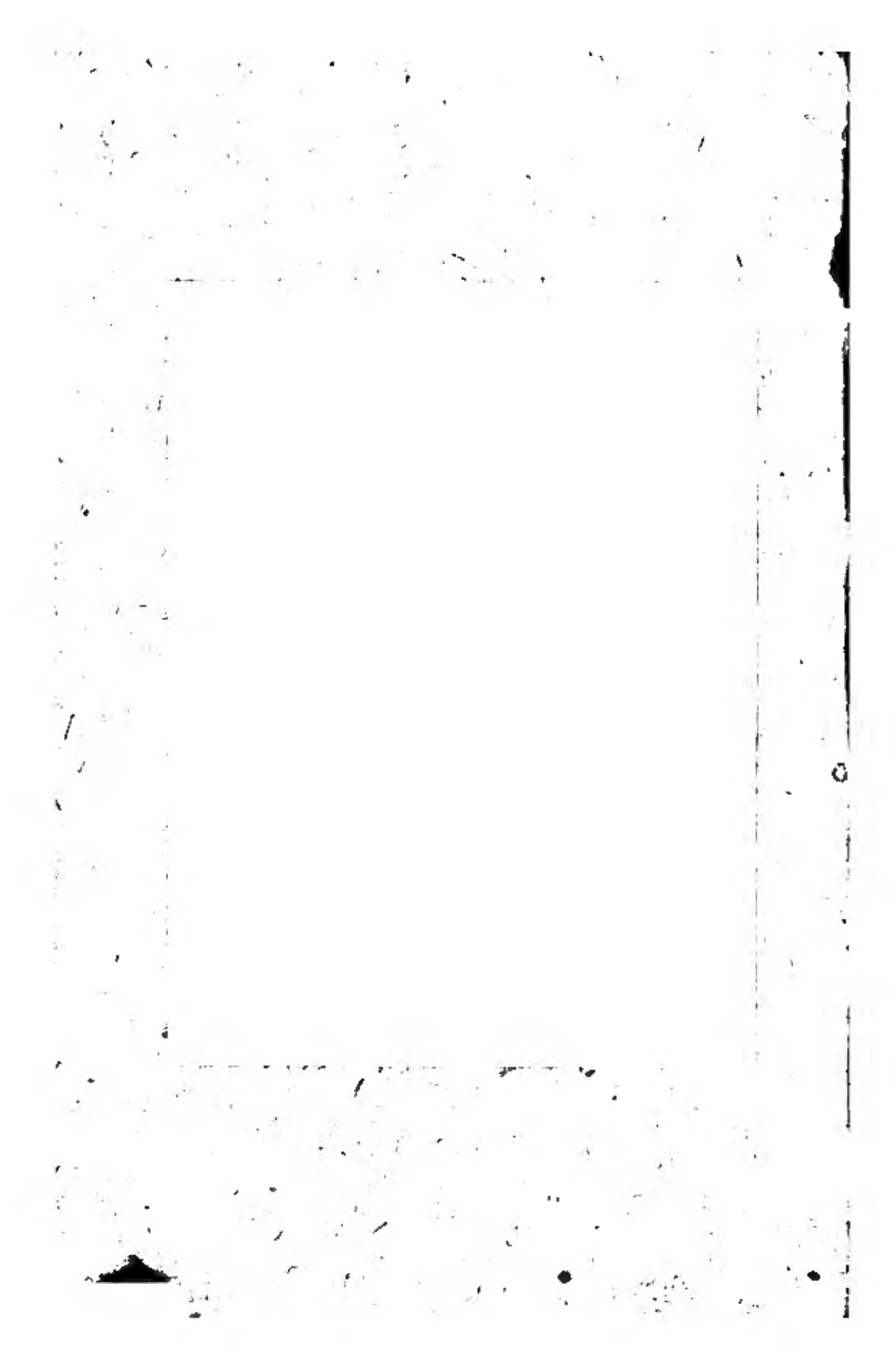
Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



2nd

QA

31

E88

5731

1691

**EVCLIDIS
ELEMENTORVM**

SEX

LIBRI PRIORES

DEMONSTRATI

ab

HENRICO COETSIO

1111074
1111074
1111074
1111074



Euclidis

EUCLIDIS

ELEMENTORUM

SEX

LIBRI PRIORES

*Magnam partem novis demon-
strationibus*

ADORNATI

OPERA & STUDIO

HENRICI COETSII.

LUGDUNUM BATAVORUM;

Apud DANIELEM GAESBEEK;

M DC XCI.

Hat of Sei
Lymann
8-19-38
30838

ILLUSTRISSIMIS, NOBILIS-
SIMIS, AMPLISSIMISQUE

ACAD. LUGD. BAT.

Curatoribus,

D^o. JACOB O

BARONI de WASSENAER,

DOMINO DE OBDAM, HENS-
BROECK, WOCHMEER, SPIER-
DIJCK, ZUIDWIJCK, KERNHEM,
TUKELO, LAGE; NOBILI HOL-
LANDIÆ; MILITIÆ EQUESTRI
BELGICÆ. SUB MAJORIS GENE-
RALIS NOMINE PRÆFECTO;
URBIS WILLEMBTADII, CÛN-
DER, SUBJECTARUMQUE AR-
CIUM GUBERNATORI.

†

D^o.

ms. 53-01-60

D^o. CONRADO

V A N

BEVNINGEN, J. C.

REIPUBLICÆ AMSTELODAMENSIS
VIRO CONSULARI, ET APUD
POTENTISSIMOS REGES NON
UNA LEGATIONE FUNCTO.

D^o. CORNELIO

TERESTEIN^{van} HALEWIJN,

REIPUBLICÆ DORDRACENÆ CON-
SILIARIO : ET IN HOLLANDIÆ
FRISIÆQUE CURIA SENATORI
ORDINARIO.

Eorum.

Nec non

Prudentissimo atque Consultis-

simo VIRO
D^o. JOHANNI
VAN DEN BERGH,

ILLUSTRISSIMORUM CU-
RATORUM, COLLEGIO A
SECRETIS.

AMICI & COEQUI

*Salutem & Felicitatem
precatur*

HENRICUS COETSIUS.

DE-

DEDICATIO.

Circumspicienti mihi,
quos Patronos novæ
huic Euclidis editioni
eligerem, statim visum est recte
me facturum, si eam Vobis,
VIRI ILLUSTRISSIMI,
offerrem, vestrumque nomen ve-
luti tutelam primæ pagine in-
scriberem. Cum enim Celeberr-
morum Professorum benevolen-
tiâ juventutem in alma, quæ
vestra tam præclara & plus
quam paternâ Curâ glorietur,
hanc Academiam, jamque est
labori per aliquot annos viribus

DEDICATIO.

meis pari incubuerim vigilantia
ac sedulitate, peccaturum me in
Personas Vestras credidi, nisi
ad Vos, ea qua par est obser-
vantia deferrem, quae illustrando
Mathematicorum facile Principi-
pi, uti equidem spero, inservi-
tura sunt; quaeque Vobis vel ob
hanc solummodo causam deben-
tur, quod in Vestra nata sint
Academia, juxta Axioma, quod
a Jurisconsultorum filiis nobis
traditum, illa quae alieno fundo
aedificata sunt, istius fundi
summo cum jure adjudicavit
domino.

DEDICATIO.

domino. Fateor multos & præcipue eruditionis Viros sese in hoc studio exercuisse, ut temeritatis redargui posse videar; at tamen, Viri Illustrissimi, perspicietis me illorum vestigia sequutum, qualicumque hac mea diligentia effecisse, ut quam plurimæ horum Elementorum propositiones, quæ prolixis ac difficilioribus immersæ demonstrationibus, multorum Tyronum in ipso, ut ajunt, limine restinguebant ardorem, nunc facilius & nullo fere negotio intelligi possint.

DEDICATIO.

possint. Quod si felix adeo sim,
ut hic meus conatus Vobis, Viri
Illustrissimi, non displiceat, cat-
car mihi addetur ad meditanda
sublimiora, quibus illorum, qui
haustis jam Elementis ad altiora
aspirant, conatus adjuvare,
quantum in me est, adlaborabo.
Vobis autem Viri Illustrissimi,
me & studia mea commendare
audeo, Deumque multum vene-
ror, ut Vos Reipublicæ & Aca-
demie bono diu salvos esse velit.

Præ.

P R Æ F A T I O .

A D .

LECTOREM.

Elementa demonstrare aggredior Euclidis, Illustris Mathematici, qui tum propriis inventis, tum ab aliis inventorum, quæ passim dispersa jacebant, collectione & justa ordinatione Magni adeptus Geometræ nomen, de omni Matheseos optime meritus est studio: id quod abunde testatum faciunt tot doctissimorum virorum commentarii, quibus hæc Elementa, quorum utilitas paucos latet, per multa celebrata sunt secula.

Admirandæ sane sunt Theonum, Proclorum, Commandi-

A

no-

P R Æ F A T I O .

norum, Clauiorum, Bettinorum,
& aliorum nominis haud obscu-
ri Mathematicorum lucubratio-
nes, quæ adeo fertiles sunt ac
dilucidæ, ut universæ Matheseos,
quantum imo plus quam sufficit,
exinde depromi queant fundamen-
ta. Quare ego, ne actum agere
videar & aliorum solummodo re-
petere dicta, quod rem ipsam
spectat & hujus Opusculi, quem
intendo, scopum paucis eloquar.
Omnium Mathematicorum, qui
in horum Euclidis Elementorum
dilucidatione & demonstratione
posteritati suam probare fategerunt
industriam, non una eademque
observatur methodus; aliis qui-
dem veterem & ab Euclide tradi-
tum nobis servantibus ordinem;
aliis

P R Æ F A T I O.

aliis vero non mordicus isti ordini inhærentibus, sed veritatum iis comprehensarum maxime naturalem contemplantibus concatenationem. Ego neglecta posteriori hac demonstrandi via, illorum, qui Clarissimi Geometræ autoritate ducuntur & veneratione, castra sequor; in quorum partes me vel unica hæc trahit ratio, quod illis, qui horum Elementorum notitia jam quodammodo sunt imbuti, ad sublimiora Veterum Mathematicorum evolventa opera faciliorem longe suppeditare mihi manuductionem videantur & aditum. Licet ab altera parte minime sua laude destituenti sint, qui liberiores incuntes viam & rerum ipsarum, quan-

P R Æ F A T I O.

tum fieri potest, naturalem sequentes ductum, proprio ingenio & ratiocinio litare maluerunt quam Veteris jurare in Verba Magistri.

In quo laborum genere haud postremo loco collocandi sunt clarissimus Christophorus Seppius & Ignatius Gaston Pardies, quorum alter natione Germanus in sua Mathesi enucleata, alter ex Galliis ortum, ducens in suis Elementis Geometriae, non solum Euclidis omnibus, verum etiam praecipuis Apollonii & Archimedis demonstratis theorematibus, haud exiguam sibi apud posteros gratiam conciliabunt & laudem.

Cum autem hæc Methodus, ut modo dixi, nos ab Antiquorum de-

P R Æ F A T I O.

demonstrandi fontibus. alienos reddat nimium, præscriptum Euclidis: potius quam alium sequi placuit ordinem; cui tamen me non ita mancipare in animum induxi meum, ut illum ullo in loco invertere nefas duxerim. Si quidem Benignus comperiet Lector me non raro in demonstranda aliqua propositione sequentem, & nondum demonstratam vocare in auxilium; quam tamen transpositionem haud mediocrem afferre facilitatem non minori cum brevitate conjunctam videbit is, qui inspicere dignabitur nostram demonstrationem ad 5 Libri I propositionem, eamque conferre cum Clavio, aut alijs, qui huic Propositioni multo plus quam altero

P R Æ F A T I O.

tanto longiorem accommodarunt demonstrationem; cujus prolixitas multorum tyronum vel maximam in discendo frangit constantiam; præterquam quod suæ demonstrationi immisceant æqualitatem angulorum infra basin, cum duo æqualia producta sint latera: quæ tamen æqualitas istius Propositionis primarium minime facit scopum. Cui malo ab omni parte nostram demonstrationem remedium afferre putamus. Nec huic transponendi methodo scrupulum Mathematicorum figit rigor, qui Paralogismos, Principii petitiones & sic dictos Circulos evitandi studio omnem suam vim referens acceptam, priorum per posteriora haudquaquam admit-

P R Æ F A T I O .

mittit demonstrationem. Sic enim nostris ordinatis demonstrationibus, ut propositiones præcedentes ope sequentium demonstratæ, harum demonstrationi vice versa non iterum inserviant, in istum scopulum impingendine minimo quidem laboramus periculo. Cæterum ipsis Demonstrationibus Methodum Algebraicam applicuimus quodammodo, ita tamen ut a tyrone debitam non repuerente attentionem facile intelligi possint ; præsertim si paginam, quam signorum, quibus utimur, dabimus interpretem & huic præfationi immediate subjungemus inspicere non recusaverit: quo facto totius plurimarum propositionum demonstrationis cursum

P R Æ F A T I O.

cursum nullo negotio statim comprehendet.

Problematum quidem constructiones ita disponimus, ut singulæ illorum partes vel primo distinguantur intuitu ; Theorematum vero propositionem statim distincta, si quæ desideratur, excipit præparatio, quæ claram ac perspicuam comitem habet demonstrationem, ut sic omnibus & Problematum & Theorematum partibus satisfactum sit abunde. Quid autem porro in singulis Libris, præsertim quinto, præstitum sit, non meum sed æquum Benigni Lectoris esto iudicium. Cujus tamen fiducia eam non postulo interpretationem, ac si mihi ipsi persuadere velim provectorum ad alteriora aspiranti

P R Æ F A T I O.

aspiranti nihil hic desiderari curiositati; cum non ferculâ doctorum palato grata virorum condire, sed Tyronum Mathematici studii cupidorum vota qualicunque hoc meo implere labore unice habeam in scopo; quem si mihi assequi datur, tum sub idonea forma editorum, quorum jam diu laboravi-
mus inopia, exemplarium defectum supplendo; tum quam plurimas horum Elementorum propositiones noxio prolixarum nimis demonstrationum nudatas involvero, in clariorem, ut spero producendo lucem; abunde futurum puto, quod mihi gratuler. Hisce vale, Benigne Lector, & si quid hoc opusculum contineat proficui, in tuum vere commodum.

*

Ex-

EXPLICATIO NOTARUM.

NE Tyronum in demonstrando ardori vel minimam injiciamus moram, datam in Præfatione liberamus fidem, illique notarum ac signorum, quæ demonstrationum brevitati inservire fecimus, significationem subjungimus.

I.

Nota \propto significat æqualitatem; ut $A \propto B$, idem est ac si dicam A est æqualis B .

2.

Nota \triangleleft indicat majoritatem; quare si occurrat $A \triangleleft B$, intellige A est major quam B .

3.

Signum \triangleright minoritatem exprimit: quare $A \triangleright B$ significabit A est minor quam B .

4. Nota

Explicatio Notarum.

4.

Nota $+$ vel plus significat Additionem; adeoq. $A + B$, idem sit ac A cum B , vel A & B simul; vel B ipsi A addendum esse.

5.

Nota $-$ seu minus subtractionem dicit: ut $A - B$ significet A minus B : vel A dempta B : vel B ab A subtrahendum esse.

6.

Si occurrat alicubi hæc formula.

$$\begin{array}{rcl} A & \propto & B \\ D & \propto & C \end{array} \bigg/ A.$$

$$A + D \propto B + C.$$

intelligendum est ab una parte A & D debere addi, ut etiam ab altera parte C addendum esse ipsi B : & tum priorem summam $A + D$ esse aequalem posteriori $B + C$. per Axioma scilicet primum.

Explicatio Notarum,

7.

Si vero sese offerat talis designatio

$$\begin{array}{r} A \propto B. \\ D \propto C. \end{array} \Bigg) S$$

$$A \div D \propto B \div C.$$

illa significabit ab una parte D subtrahi debere ab A, ut & ab altera parte C a B, & tum primum residuum $A \div D$ posteriori $B \div C$ esse aequale.

8.

Eadem formula etiam non raro occurret applicata signis \lessgtr . hoc modo.

$$\begin{array}{r} A \lessgtr B. \\ D \propto C. \end{array} \Bigg) A.$$

$$A \div D \lessgtr B \div C.$$

Vel.

$$\begin{array}{r} A \gtrless B. \\ D \propto C. \end{array} \Bigg) A.$$

$$A \div D \gtrless B \div C.$$

&

Explicatio Notarum.

Et tum intelligendum est post factam additionem summam $A + D$ esse vel majorem in signo $<$ vel minorem in signo $>$ quam summa $B + C$.

Nec aliter si loco A occurrat S vel S (denotabitur residuum $A - D$ esse majus in signo $<$ vel minus in signo $>$ quam residuum $B - C$. id quod ex numero 7 sum ducit fundamentum.

9.

Si in materia proportionum se offerat.

$$A - B = C / D.$$

Vel in numeris

$$4 - 8 = 3 / 6.$$

denotat quantitatem A sese habere ad B , sicut C se habet ad D : vel numeram 4 se habere ad numerum 8, sicut 3 ad 6: adeoque ista quatuor esse proportionalia.

Explicatio Notarum.

10.

Litera X cum duobus punctis utrinque notata hoc modo $\cdot x \cdot$ significat multiplicationem : ut si occurrat $A \cdot x \cdot B$, designat A per B multiplicandum esse, ut ita fiat rectangulum AB. Eodem modo $4 \cdot x \cdot 8$ significat 4 debere multiplicari per 8 : quæ tamen multiplicatio non semper absolvitur, ut clarius pateat ex quamam multiplicatione aliquod productum sit generatum.

11.

Nota \square , cujus omnia latera sunt æqualia, significat Quadratum : ut $\square AB$ idem est ac Quadratum AB.

12.

Nota \square , cujus latera sunt inæqualia, denotat Parallelogrammum Rectangulum, vel simpliciter

Explicatio Notarum.

ter Rectangulum; ut si occurrat $\square CD$, idem erit ac Rectangulum CD .

13.

Nota $\sqrt{}$ significat radicem aliqujus quantitatis; ut \sqrt{AB} , denotat ex AB extrahendum esse radicem: similiter $\sqrt{12}$ vult, ut ex 12 extrahatur radix, quæ non aliter quam per $\sqrt{12}$ designatur.

14.

In demonstrationibus non paucis quædam literæ occurrunt, infra se invicem scriptæ, cum linea intermedia; quod ubique in genere significat inferiora superioribus esse æqualia; ac proinde inferiora in locum superiorum esse substituenda ac usurpanda: quemadmodum hoc in specie etiam notavimus ad demonstrationem Casus 3. Proposit. 35. III. Id quod etiam in propos. 36. III. probe notandum.

Si-

Explicatio Notarum.

Similiter in Proportionibus hoc observandum est bene, quando una quantitas collocatur supra aliam: tunc inferiorem legendam esse pro superiori, cum supponantur inter se aequales esse: Exemplo sit demonstratio propositionis 3, VI. quæ est pag. 411. quæ sic habet,

$$\text{Tri. Z} - \text{Tri X} = \text{AE} / \text{BC.}$$

feu Y.

dicendum est Triangulum Z se habet ad Triangulum X hoc est Triangulum Y: sicut basis AE se habet ad basin BC.

15.

Pro citationibus marginalibus notandum primum numerum minorem significare propositionem; secundum vero maiorem denotare librum: ut 4. III. quantam propositionem Libri tertii dicit: & sic porro in omnibus aliis.

E U.

EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER PRIMUS.

CUm scientiæ nomen solummodo mereatur illa cognitio, quæ ex certis & indubitatis deducta principiis, omnem vel levissimæ dubitationis discutit nebulam; Mathematicæ procul dubio disciplinæ maximo cum jure hoc sibi vendicant nomen. Cum enim in aliis disciplinis tam sæpe de conclusionibus non aliam ob causam quam principiorum ambiguitatem contentionis serra reciprocetur; Mathematicæ vel ob hoc solum illis palmam præripiunt, quod conclusiones offerant, non ex verisimilibus & assensum emendicantibus, sed ex simplicissimis & inconcussis deductas principiis. Quid enim certi-

A

tu.

tudini & veritatis propagationi magis contrarium, quam in aliqujus materiae pertractatione de varia & nunquam fere sibi simili vocum significatione saepius repetita disputatio? Quid nos in maiorem circa conclusiones deiecit fluctuationem, quam si illas superstruamus assertionibus aut temere assumtis, aut non probatis? quorum unum si contingat a veritate recedentes in turpissimum incidimus errorem; quod si vero alterius semitae premonstrata vestigia veritatem assequimur, non firmum nostrum ratiocinium sed casum nos eo deduxisse certo certius existimandum est.

A quo duplici vitio Mathematici sese omnino praestiterunt liberos, tum Definitionum suarum claritate omnem vocabulorum & terminorum, quos in demonstrationum progressu adhibent, ambiguitatem tollendo; tum

LIBER PRIMUS.

tum præmissorum Axiomatum evidentiâ & naturali certitudine firmissimum demonstrationibus substruendo fundamentum.

Hinc est quod studia Mathematica, ex primis & simplicissimis emergentia principiis ad tam sublime perfectionis fastigium propecta cernere licet: Hinc est quod illæ scientiæ, quæ in suo initio & quasi nativitatis momento humi repere & pulverem lambere videntur, relictâ terra per aërem volitantes, ad ipsum Cœlum ascendant; illiusque aliis inaccessibleia arcana inconcussis calculi sui subjiciant legibus.

Horum autem Principiorum, quibus tota Mathematica ortum, progressum, omnemque qua eminet evidentiâ acceptam referre debet, genera sunt tria: Definitiones, Postulata, Axiomata.

DEFINITIONES.

I. *Punctum est, cujus pars nulla.*

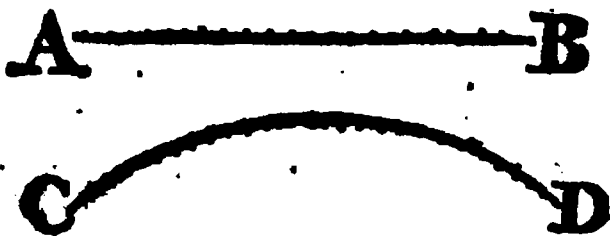
Facile concipimus tale punctum in rerum natura minime dari. Quicquid enim est, aut ad Spiritum refertur aut ad corpus: nemo autem facile sibi persuadebit scientias Mathematicas Spiritum aut res spirituales & omni materia carentes pro suo subjecto assumere, cum agat de corpore quatenus mensuram & ad alia corpora proportionem aliquam admittit: unde patet omne punctum quantumvis parvum concipiatur, pertinere ad corpus, esse ipsum corpus & æque ac corpus triam admittere dimensionem, sc. longitudinem latitudinem & profunditatem: licet enim puncta possint occurrere adeo minuta, ut harum dimensionum accurata distinctio vel intensissimam sensuum fallat aciem, longius tamen patentem vim nostrarum cogitationem non effugiunt, cum semper in illis distinguere liceat partem dextram a sinistra, superiorem ab inferiori.

Si vero ab illis punctis in nostra cogi-

LIBER PRIMUS.

gitatione trinam istam dimensionem abstrahamus, eamque licet istis propriam & semper inhaerentem, in illis non consideremus, obtinemus puncta Mathematica; quæ ad sensum nostrum relata acutissimæ acus impresso vestigio aliquo modo designari possunt, in quo sensus dubium relinquunt, utrum longitudo latitudinem superet nec ne, an vero latitudo longitudinem excedat: & utrum quælibet ex his profunditate sit major.

2. *Linea vero longitudo latitudinis expers.*



Quemadmodum a parte rei non datur punctum omni prorsus dimensione carens, ita nec datur linea longitudinis tantum capax: quare etiam per abstractionem in linea unam tantum consideramus dimensionem secundum longitudinem, seposita latitudine cum profunditate. Ad cujus considerationis imitationem in communi vitæ ulu ulnam re-

A 3

bus

● EUCLIDIS

bus mensurandis solummodo applicamus secundum longitudinem, reliquis dimensionibus in latitudinem & profunditatem neglectis.

Cæterum lineæ generationem hoc modo concipere licet. Si consideremus punctum quoddam in aliquo loco constitutum inde moveri incipere; ita ut motus sui visibile relinquat vestigium; illud nobis exhibebit lineam hoc modo generatam.

Quia autem illud punctum ab uno loco ad alium moveri potest vel per viam rectam vel per curvam, uti videre est in lineis A B. C D, inde oritur lineæ divisio in Rectam vel Curvam.

3. Lineæ autem termini sunt puncta.

Hoc facile intelligitur ex lineæ jam allata generatione; quod nimirum idem illud punctum quod in principio sui motus erat in loco A vel C, in fine perveniat ac subsistat in loco B vel D.

4. Linea recta est, quæ ex æquo sua interjacet puncta.

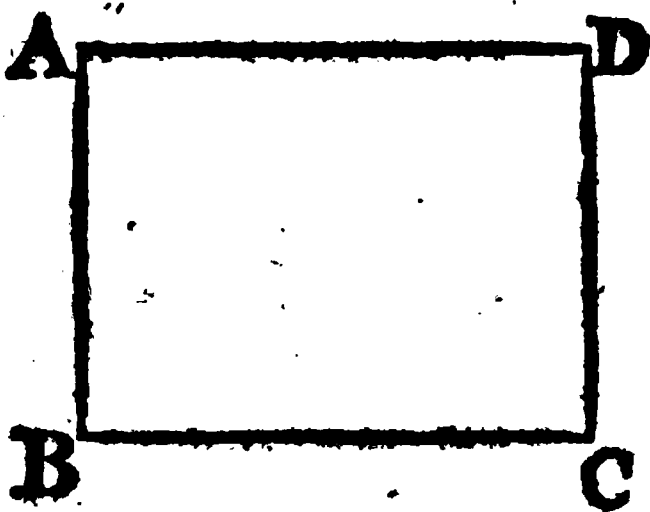
Vel

Vel cuius puncta extrema obumbrant omnia media,

Vel minima earum, quæ a puncto ad punctum duci possunt. Juxta Archimede-
dem.

Ex quibus per definitiones contrarias facile innotescit quænam sit Linea curva.

5. *Superficies est quæ longitu-
dinem latitudinemque tantum ha-
bet.*



Sicut non datur punctum cum nulla,
nec linea cum una tantum dimensione,
sic etiam a parte rei non datur superficies
cum duabus, sc. longitudine & latitu-
dine tantum, seclusa profunditate, quæ
ideirco nostro tantum cogitandi modo a
reliquis separatur ac in corpore non con-
sideratur,

Su-

Superficieï autem generationem hac ratione concipere possumus.

Cogitemus punctum A versus partes inferiores motum descripsisse lineam rectam AB; deinde eandem lineam AB moveri incipere versus partes dextras; donec linea AB perveniat ad locum DC. Patet isto motu punctum A descripsisse lineam AD, & punctum B lineam BC; quemadmodum etiam omnia puncta intermedia lineæ AB suas lineas descripsisse concipiendum est: ut ex tali motu lineæ AB generata sit Superficies ABCD.

6. Superficieï autem extrema sunt lineæ.

Quod facile innotescit ex illis quæ circa superficieï generationem modo dicta sunt.

Quemadmodum autem antea pro diversa motus via vidimus lineam generari aut Rectam aut curvam; eodem etiam modo per diversum lineæ motum superficies describitur aut Rectæ seu Planæ aut Curvæ.

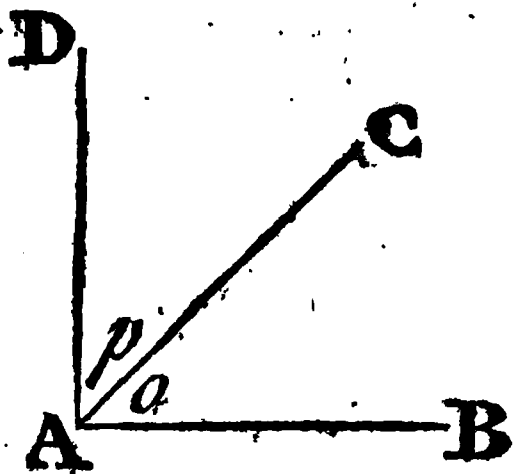
LIBER PRIMUS. 9

7. *Plana superficies est, quæ ex æquo suas interjacet rectas.*

Quæ antea de linea recta dicta sunt, similiter hic applicari possunt.

Hinc nullo negotio intelligitur quænam sit superficies curva.

8. *Planus autem angulus est duarum linearum in plano se mutuo tangentium & non indirectum, jacentium, alterius ad alteram inclinatio.*



Ad constituendum angulum planum seu angulum in superficie, requiritur.

1. Ut duæ lineæ se mutuo tangent.

B

2. Ut

2. Ut non jaceant in directum, sed una ad alteram inclinet.

Quemadmodum utramque hanc conditionem cernere licet in angulo CAB, ubi duæ lineæ AC. AB, se invicem tangentes in puncto A, non jacent in directum, sed ad se mutuo inclinant.

Non autem pauciores nec plures duabus ad angulum planum exiguntur lineæ:

Non pauciores, quia si unica ista linea dividatur in duas, duæ illæ sibi jacebunt in directum; id quod repugnat secundæ conditioni.

Non plures, quia ex gr: tertia AD, si cum reliquis in eodem sit plano, non unum sed duos faciet angulos DAC, CAB; si vero sit extra planum reliquarum linearum, non angulum faciet planum, sed solidum, cujus Definitionem Euclides libro xi. tradit.

Quia jam natura anguli plani consistit in duarum linearum ad se invicem inclinatione, patet anguli alicujus quantitatem non consistere in majori vel minori longitudine linearum: sed tantum in illarum majori vel minori inclinatione; duæ enim lineæ majores eandem possunt habere inclinationem cum duabus minoribus,

LIBER PRIMUS. II

bus, minime mutata anguli quantitate.

Deinde notandum Geometras ad designandum aliquem angulum tres adhibere literas, quarum media punctum denotat ad quod lineæ angulum continentes concurrunt. Ut ad denominandum angulum qui ad punctum A, constituitur a duabus lineis AC. AB. scribitur angulus CAB: vel ab altera parte angulus DAC est qui in puncto A fit a lineis AD. AC.

Nos autem brevitatis & perspicuitatis gratia in sequentibus non semel locum trium literarum angulo designando adhibemus unam ipsi inscriptam.

Ut ad nominandum angulum DAC. efferemus angulum P. sic etiam loco anguli CAB scribemus angulum O.

9. Cum autem continentes angulum lineæ fuerint rectæ, rectilineus appellatur angulus.

Accedit Euclides ad anguli divisionem. Supra vidimus linearum duo esse genera, scilicet illas esse vel rectas, vel curvas.

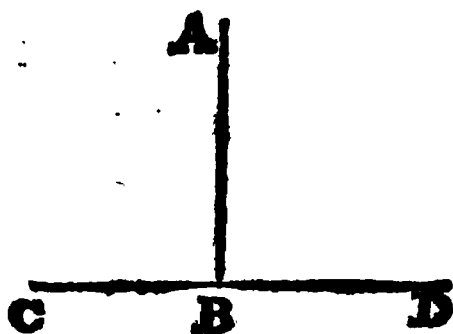
Quia autem illæ tribus diversis modis possunt conjungi, scilicet vel recta cum re-

Sta: vel recta cum curva; vel curva cum curva; hinc etiam tria oriuntur angulorum genera.

Primus quippe casus suppeditat angulum rectilineum, cujus Definitionem hic tradit Euclides.

Secundus casus nobis dat angulum mixtilineum, cujus mentionem factam videmus in Libro III. Tertius denique casus constituit angulum curvilineum.

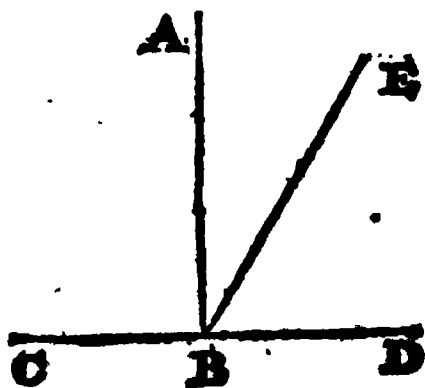
10. *Cum vero recta AB rectæ CD insistens duos Angulos ABC. ABD æquales inter se facit; Rectus est uterque equalium angulorum: & insistens recta AB vocatur Perpendicularis lineæ CD. cui insistit.*



Anguli ABC. ABD dicuntur recti, quia linea AB, ipsi CD ita directo situ in-

insistit, ut ab una parte non magis inclinet versus BC quam ab altera parte versus BD;

11. *Obtusus angulus EBC est, qui recto ABC major est.*



12. *Acutus vero EBD, qui recto ABD minor est.*

In tribus hisce definitionibus Euclides tradit anguli rectilinei subdivisionem petitam a triplici linearum inclinationis forma: quæ ab utraque parte vel est æqualis; vel ab una parte major altera; vel ab una parte minor altera: ut in Schemate videre est.

13. *Terminus est quod alicujus est extremum.*

B 3

Ut

Ut punctum lineæ: lineæ superficiæ: & superficies corporis.

14. *Figura plana est superficies plana, una vel pluribus lineis undique terminata.*

Cum lineæ sint vel rectæ vel curvæ, illæque tribus modis possint conjungi; figurarum planarum inde oriuntur tres species.

Curvilineæ, quæ vel una vel pluribus curvis terminantur. Una terminatur circulus, cujus definitionem statim tradit Euclides.

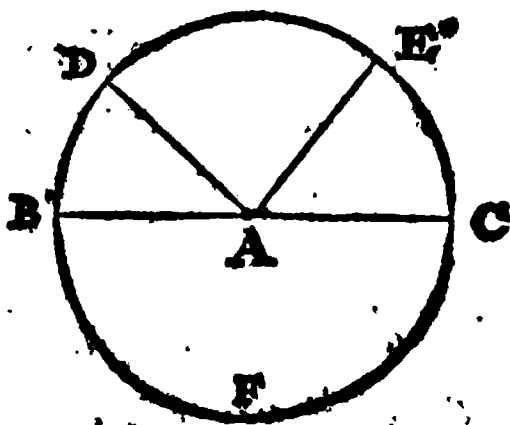
Mixtilineæ, quæ partim curvis partim rectis terminantur: huc pertinent semicirculus & segmentum Circuli.

Rectilineæ quæ solis rectis terminantur, quæ comprehendunt omnia polygonæ sive regularia sive irregularia.

15. *Circulus est figura plana sub una linea curva DCF comprehensa, quæ vocatur Peripheria: ad quam ab uno puncto A eorum quæ intra figuram sunt posita,*

14,

*et omnes cadentes rectæ AB.
AD. AE. AC inter se æquales
sunt.*



Proponit Euclides definitionem Circuli jam descripti, cujus delineationem & generationem hoc modo concipere possumus. Ducta sit quælibet recta linea AB. cujus una extremitas A ponatur immota & affixa plano; altera vero extremitas B cum tota linea moveatur circa punctum A, per loca AD. AE. AC. AF, donec tandem redeat ad locum AB, unde moveri coeperat: ista linea AB hac circumductione describet circulum BDEC.F.

Ex qua descriptionis forma patet omnes Radios cujuslibet Circuli esse inter se æquales: cum linea AB, cujus circumvolutio circulo ortum dedit, per omnia

omnia loca, AD. AE. AC & similia transiit, adeoque punctum B fuit aliquando in punctis D. E. C. &c. adeoque lineæ AD. AE. AC. sunt æquales eidem lineæ AB.

Hinc jam etiam immediate sequitur omnia puncta circumferentiæ DCFB æqualiter distare a puncto A.

16. Illud autem punctum A centrum circuli dicitur.

17. Diameter Circuli est recta quædam BC per Centrum A ducta, & utrinque in punctis B. C. peripheriâ terminata; quæ & Circulum bifariam fecit.

Ut linea in Circulo ducta sit Diameter duæ requiruntur conditiones.

I. Ut transeat per centrum.

II. Ut ab utraque parte terminetur in peripheria.

Adeoque omnis linea, harum nullam aut tantum unam habens conditionum, Diameter dici nullo modo potest.

Cæterum Diametrum circulum divide-

re bifariam patet ex eo quod transeat per Circuli punctum, quod ex omnibus medium est: quia scilicet est medium omnium Diametrorum quæ in Circulo duci possunt.

Sequitur jam secunda species figurarum, nempe mixtilineæ.

18. *Semicirculus autem BDE CAB. est figura, quæ continetur sub Diametro BC, & dimidia circumferentia BDEC.*

19. *Segmentum circuli est figura quæ continetur sub qualibet recta circulo inscripta & abscissa peripheria.*

Segmentum, excluso semicirculo, est duplex, vel majus Semicirculo, vel minus.

Segmentum majus est illud in quo reperitur centrum.

Segmentum minus est illud quod centrum non continet.

Nunc Euclides aggreditur tertiam speciem figurarum scilicet rectilinearum.

20. *Rectilineæ figuræ sunt quæ sub rectis lineis continentur.*

Distinguuntur autem rursus hæ figuræ rectilineæ in tres species; vel enim sunt Trilateræ; vel Quadrilateræ; vel Multilateræ.

21. *Trilateræ quidem figuræ sunt, quæ sub tribus.*

22. *Quadrilateræ vero quæ sub quatuor.*

23. *Multilateræ denique quæ sub pluribus quam quatuor rectis comprehenduntur.*

Generali vocabulo hæ dicuntur Multilateræ ad infinitam nominum evitandam multitudinem.

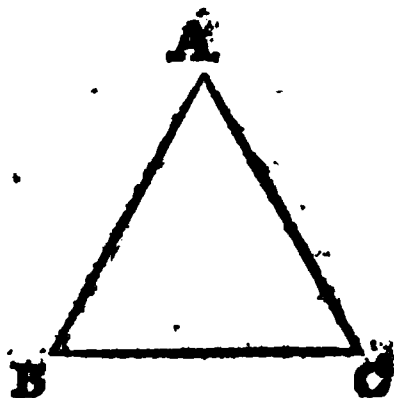
Jam cum figurarum rectilinearum primam speciem constituent figuræ Trilateræ, seu vulgo sic dicta Triangula, illorum divisionem proponit Euclides, petitam ex consideratione tum laterum, tum angulorum, quorum numerus (ut & in omnibus figuris rectilineis) est
æqua-

LIBER PRIMUS. 19

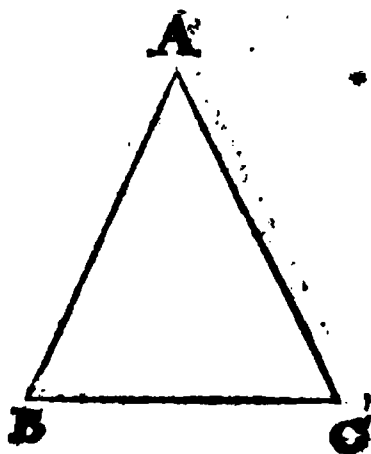
Æqualis: quippe triangulum tot continet angulos quot latera.

Triangulum respectu laterum est triplex; Æquilaterum, Isosceles, & Scalenum.

24. *Triangulum æquilaterum est, quod tria latera habet equalia.*



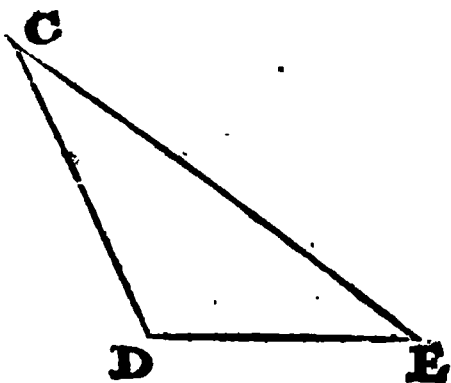
25. *Isosceles autem, quod duo tantum habet equalia AB. AC,*



C 1

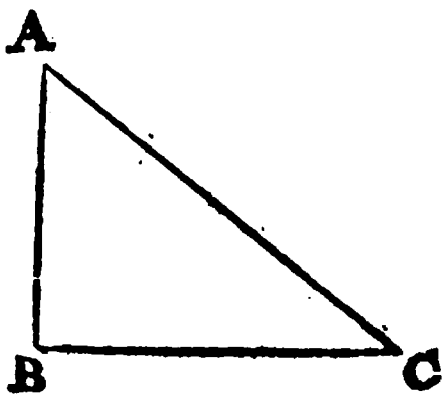
26. Scd

26. *Scalenum denique quod tria
inequalia habet latera.*



Secunda Triangulorum divisio pro fundamento habet tres angulorum species ; sc : rectum, obtusum & acutum; hinc enim Triangulum dividitur in Rectangulum, Obtusangulum, & Acutangulum.

27. *Triangulum rectangulum est,
quod unum habet angulum rectum
ABC.*

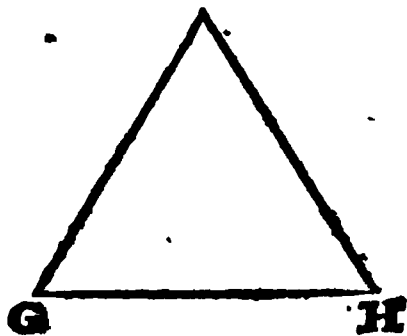


28. Ob-

LIBER PRIMUS. 21

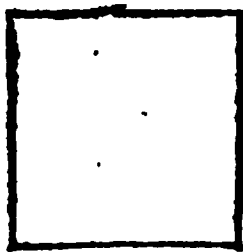
28. Obtusangulum est, quod unum habet angulum CDE obtusum id est majorem recto.

29. Acutangulum denique quod tres angulos $F. G. H.$ habet acutos, hoc est, minores recto.



Sequitur jam secunda species figurarum rectilinearum: scilicet Figuræ Quadrilateræ. Hæ autem ab Euclide recensentur quinque: Quadratum: Figura altera parte longior; Rhombus; Rhomboides; & Trapezia.

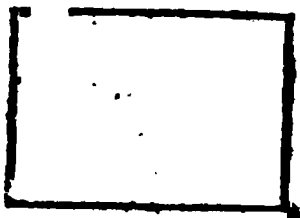
30. Quadratum est, quod æquilaterum est & rectangulum.



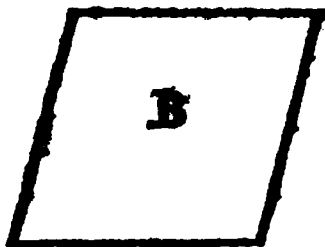
C 3

31. A.

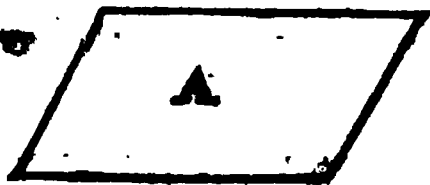
31. Altera parte longior figura est, quæ rectangula quidem, at æquilatera non est.



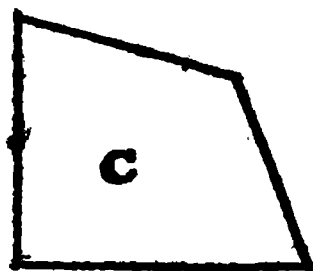
32. Rhombus autem, quæ æquilatera quidem, sed rectangula non est.



33. Rhomboides est, quæ ad-versa & latera & angulos equalia inter se habens, neque æquilatera est; neque rectangula.



34. Trapezia denique dicuntur reliquæ figuræ quadrilateræ, quæ ad nullam ex quatuor præcedentibus referri possint.



35. Rectæ lineæ parallelæ seu æquidistantes AB . CD sunt, quæ in eodem plano existentes, & utrimque in infinitum productæ, ad eandem distantiam a se invicem manent remotæ; ideoque nunquam concurrent.

A ————— B

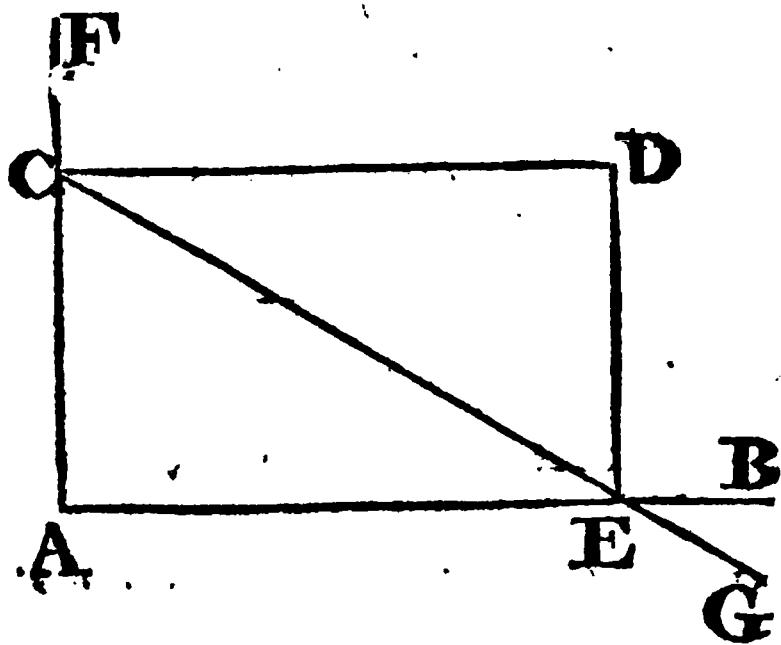
C ————— D

Non omnes lineæ, quæ nunquam concurrent, parallelæ dicendæ sunt; cum

cum dentur lineæ, quæ licet simul in infinitum producantur, ita ut ad se mutuo in infinitum magis ac magis accedant, nunquam tamen concurrent; ut Hyperbola & recta linea; Conchois & recta linea; Duæ æquales Parabolæ circa eandem Diametrum: quæ idcirco nequaquam dicendæ sunt parallelæ.

Unde facile manifestum evadit ad naturam parallelismi necessario requiri æqualem ab omni parte distantiam: quam conditionem ab Euclide omissem nos cum celeberrimo Tacqueto adjecimus.

Cæterum linearum parallelarum, quas Euclides ut jam descriptas considerat, generationem & delineationem duobus modis concipere possumus.



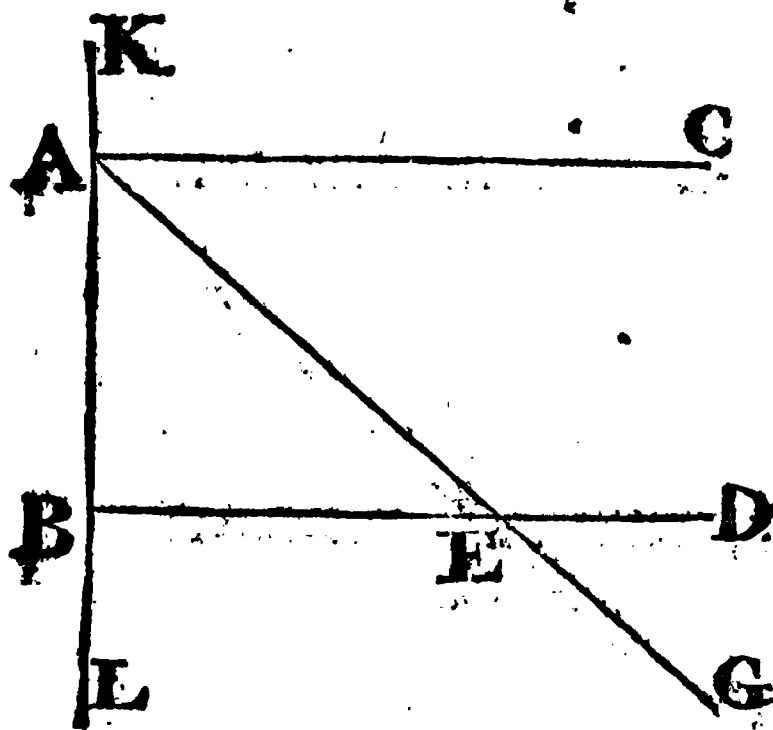
PRIMUS MODUS.

Ponamus lineam CA perpendiculariter insistere lineæ AB, ut angulus CAB sit rectus; deinde cogitemus lineam CA una suâ extremitate moveri super lineam AB, ut semper ipsi maneat perpendicularis; si jam linea CA hoc suo motu pervenerit in DE, punctum C descriptam relinquet lineam CD, quæ nunquam potest magis recedere a linea AB, nec ad ipsam propius accedere, cum linea AC durante suo motu semper fuerit eadem & sibi æqualis; adeoque linea CD in omnibus suis punctis manet cum AB in eadem distantia, & si iste motus lineæ CA in infinitum duraret, etiam linea CD in infinitum ab AB distaret, adeoque nunquam cum illa concurreret: unde jam certo concludere licet lineam CD hoc modo generatam lineæ AB esse parallelam.

Deinde cum jam constet lineam CD non posse magis in uno puncto ad lineam AB accedere aut ab illa recedere quam in alio, sequitur lineam CD ad lineas CF, CA habere æqualem inclinationem, adeoque per definitionem Per-

D. pen.

pendicularis angulum DCA esse rectum,
& æqualem angulo CAB qui positus est
rectus; adeoque duos angulos interiores
 ACD . CAB simul sumtos esse æquales
duobus rectis. Id quod natura parallela-
rum AB . CD hac ratione descriptarum
omnino requirit.



SECUNDUS MODUS.

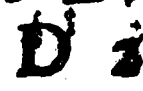
Ad lineæ KL punctum A concipia-
tur facta linea AC perpendicularis, quæ
licet in infinitum producat, nunquam
inclinationem quam ad AK , AL habet
(illa autem utrinque æqualis est) mutabit.
cum

cam anguli quantitas non in majori vel minori linearum longitudine, sed in majori vel minori inclinatione consistat.

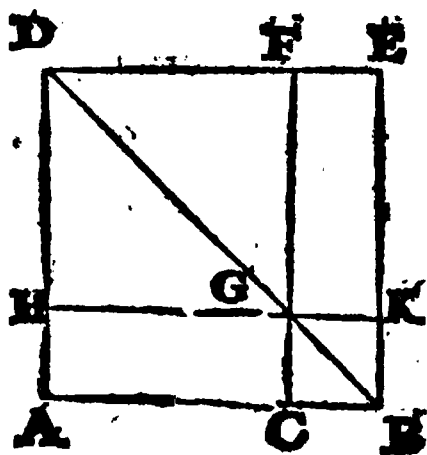
Deinde ex alio quovis puncto B cogitemus duci lineam perpendicularem BD, quæ etiam licet infinite protrahatur, nunquam aliam acquireret inclinationem ab illa quam jam habet ad lineas BK. BL.

Cum jam linea AC in infinitum producta non possit ascendere versus superiora nec descendere versus inferiora: similiter linea BD etiam in infinitum continuata nec altiora nec demissiora petere possit; necessario sequitur istas lineas AC. BD semper servaturas eandem a se invicem distantiam nec concurrere posse unquam; adeoque juxta hanc definitionem illas esse parallelas.

36. *Parallelogrammum est figura quadrilatera cujus bina opposita latera sunt parallela seu æquidistantia.*

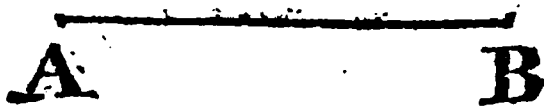
37. *Cum vero in parallelogrammo Diameter BD ducta fuerit, duæque rectæ EF. HK lateribus parallelæ secantes Diametrum in u-*


no eodemque puncto G , ita ut parallelogrammum distributum sit in quatuor parallelogramma; illa per quæ Diameter non transit, scil: AG . GE . appellantur complementa eorum quæ circa Diametrum consistunt, ut HF . CK .



POSTULATA.

I. Postuletur a quovis puncto A ad quodvis punctum B rectam lineam AB ducere.

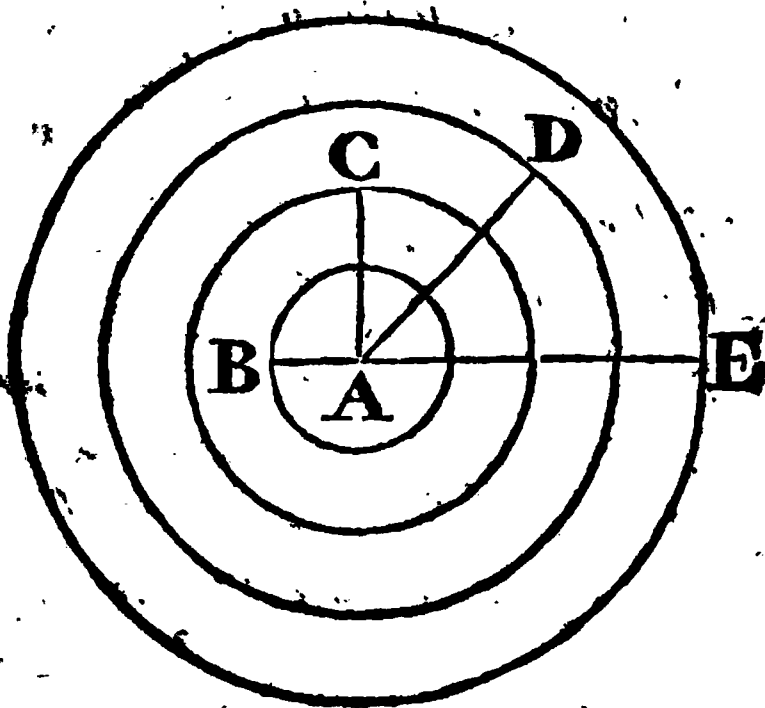


LIBER PRIMUS. 19

2. *Et terminatam rectam AB
in continuum recta producere in C.*



3. *Et quovis centro A & quo-
libet radio AB. AC. AD. AE.
circulum describere.*



D 3

2. AE

AXIOMATA.

1. *Quæ sunt eidem æqualia,
& inter se sunt æqualia.*

2. *Si æqualibus æqualia ad-
dantur, tota erunt æqualia.*

3. *Si ab æqualibus æqualia
demantur, residua manebunt
æqualia.*

4. *Si inequalibus æqualia ad-
jecta sint, tota sunt inequalia.*

5. *Si ab inequalibus æqualia
ablata sint, reliqua sunt inæ-
qualia.*

6. *Et quæ ejusdem sunt du-
plicita, inter se sunt æqualia.*

Idem intelligendum de triplicibus,
quadruplicibus, quintuplicibus & sic in
infinitum.

7. Et

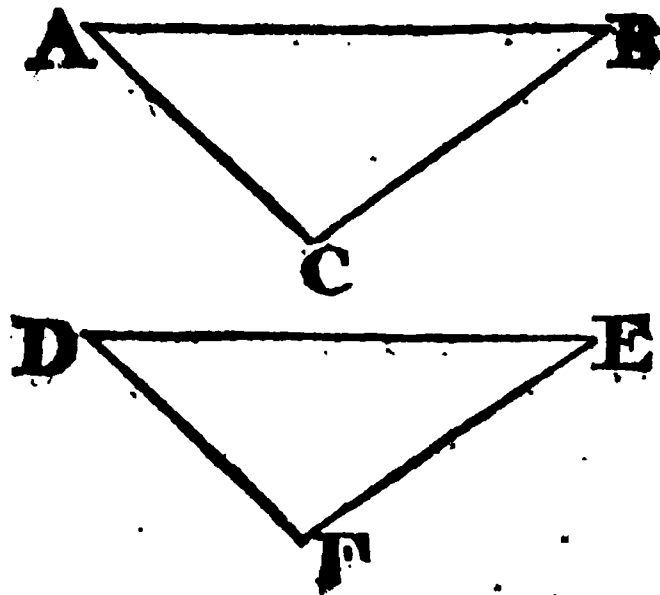
7. Et quæ ejusdem sunt dimidia, inter se sunt equalia.

Nec hoc axioma se tantum restringit ad partes dimidias; sed etiam in tertiis, quartis, in quintis & sic porro in infinitum suam habet veritatem.

8. Quæ congruunt sibi mutuo, inter se sunt equalia.

Si primo concipiamus lineam DE superimponi lineæ AB, ita ut puncta extrema D. A. ut & E. B. coincidant; similiter omnia puncta intermedia lineæ DE respondeant omnibus mediis punctis lineæ AB, pro certo hinc asserere possumus lineam DE esse æqualem lineæ AB: quia omnes partes lineæ DE exactissimè conveniunt cum omnibus partibus lineæ AB.

Deinde



Deinde sub quolibet inclinatione ad lineæ AB punctum A ducatur linea AC: si jam ad lineæ DE punctum D ducatur linea DF, ita ut inclinatio lineæ DF ad lineam DE, sit æqualis vel similis inclinationi lineæ AC ad lineam AB: & linea DF sit æqualis lineæ AC: & tum angulus FDE superimponatur angulo CAB, omnia correspondebunt: scilicet linea DE cum AB, inclinatio cum inclinatione, & linea DF cum AC. Adeoque jam non tantum lineæ congruunt sed & anguli.

Si denique ducatur recta CB, ut & FE, & una figura DEF imponatur alteri ABC: jam etiam tertium latus FE congruet cum tertio latere CB; adeoque

que totum triangulum DEF congruet triangulo ABC : unde necessario sequitur unum alteri esse æquale.

9. *Totum sua parte majus est.*

10. *Omnes anguli recti inter se sunt æquales.*

11. *Si in duas rectas AG. BD recta AB incidens interiores & ad easdem partes angulos ABD, BAG duobus rectis minores faciat ; productæ duæ illæ rectæ tandem coincident inter se ad eas partes , ubi sunt isti anguli duobus rectis minores.*

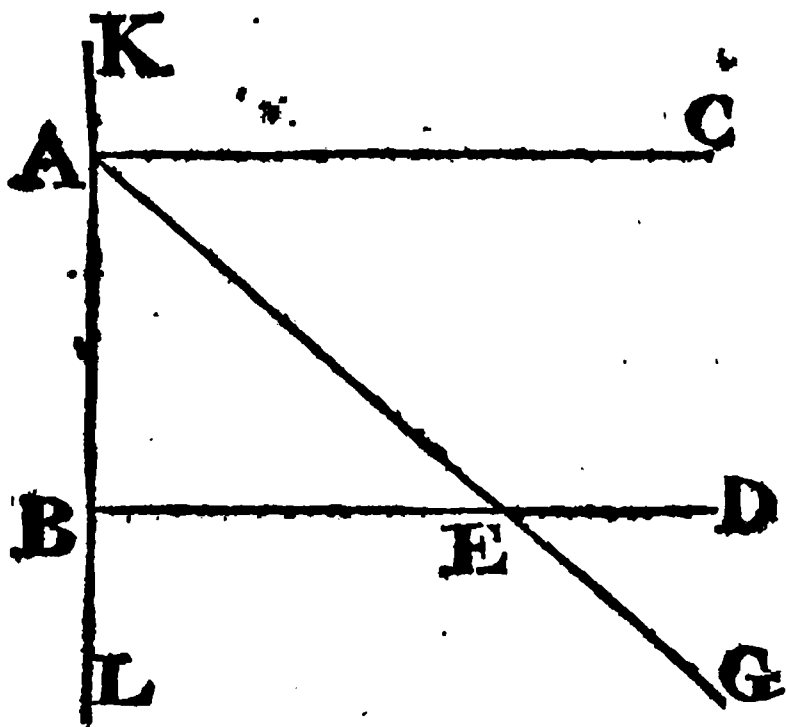
Cum in hoc Axiomate mentionem faciat Euclides duarum linearum coincidentiæ , & duorum interiorum angulorum , facili negotio patet illud aliquo modo respectum habere ad Definitionem linearum parallelarum superius traditam : cumque in ista definitione nec tertia li-

E

nea

nea incidens, nec duo anguli interiores occurrant, fatendum ingenue erit, huius Axiomatis lucem in primo intuitu non apparere tantam, quanta in præcedentibus statim affulsit; imo quanta etiam in omnibus communibus sententiis requiritur.

Quod si vero in memoriam revocemus supra allatos modos generationis parallelarum, putamus inde huic Axiomati multum affundi posse claritatis. Sumamus Ex: Gt: secundum.



Ibi quippe vidimus lineas parallelas AC; BD ex sua natura & generationis modo requirere ut duo anguli CAB. DBA sint recti, hoc est istius parallelismi non aliud esse fundamentum quam cum angulus unus ABD

ABD sit rectus; (quod semper supponimus) ut alter BAC etiam sit rectus: adeoque ut linea AB perpendiculariter in lineam AC cadens etiam sit perpendicularis ad alteram BD.

Si jam ex puncto A infra lineam AC ducatur alia quælibet ut AE; ita ut angulus BAE, sit minor recto: illa necessario si producat magis ac magis debet recedere ab AC: quia alias deberet aut esse parallela ipsi AC, aut iterum in alio puncto cum ipsa concurrere: non prius, quia habet punctum A commune adeoque in illo concidunt; non posterius quia tum duæ rectæ spatium comprehenderent, quod repugnat Axiomi sequenti.

Cum manifestum nunc sit lineam AE magis ac magis recedere ab AC, etiam patet illud non posse fieri nisi illa magis ac magis appropinquet ad alteram parallelam BD; quod tamen in infinitum absque concursu fieri minime possibile est; si enim unius lineæ punctum A ab alterius lineæ puncto E ad quamlibet distantiam remotum esse concipiamus; & a puncto A versus E ducere incipiamus lineam aliquam brevem; illa si producat, adeoque ab AC magis ac magis recedat,

necessario ad punctum E magis ac magis accedet, donec tandem porro producta per illud punctum E transeat.

Si enim impossibile sit ut per E transeat, & duobus unum verum est; aut a puncto A. ad E. non posse duci lineam rectam, quod repugnat postulato primo: aut lineam AE, si quam proxime ad punctum E pervenerit, aliorsum se determinare adeoque se flectere; quod non potest esse nisi ex recta fiat curva: quod tum est contra Hypothesin.

Dux tamen adhuc discutiendæ restant difficultates, quæ linearum AE. BD necessarium vacillare faciant concursum.

Prima est, quod Hyperbola & recta, Conchois & recta, duæ Parabolæ æquales circa eandem diametrum, simul in infinitum productæ nunquam concurrant.

Quæ tamen difficultas evanescit si consideremus illas lineas esse extra genus linearum, de quibus agit Euclides in hoc Axiomate; expresse enim tantum loquitur de lineis rectis; cum Assymptoti sint (saltem altera) ex lineis mixtis.

Altera difficultas oritur ex Clarissimi Bettini duabus rectis (in Apiar. 3. & Ærario Tom. I. pag. 354.) quæ licet internos

ternos angulos duobus rectis minores efficiant, si producantur tamen nunquam coincident.

Sed nec hoc nostri Axiomatis evidentiæ & veritatem labefactare potest. Cum istæ lineæ non simpliciter seu tanquam a puncto ad punctum, sed cum certa quadam conditione, scilicet adjuncta proportionē producantur. Quæ proportionalis linearum productio hic nullum omnino habet locum.

12. *Duæ rectæ spatium non comprehendunt.*

13. *Omne totum est æquale omnibus suis partibus simul sumptis.*

Quoniam majoris perspicuitatis gratia Mathematicis in more positum est; ut veritates quas demonstrandas suscipiunt, distinctis a se invicem complectantur propositionibus; notandum est hæc propositiones dividi in Problemata & Theoremata,

Problema est propositio in qua aliquid

E 3

Pro-

proponitur efficiendum, & conclusionis formula semper talis est: Quod erat faciendum.

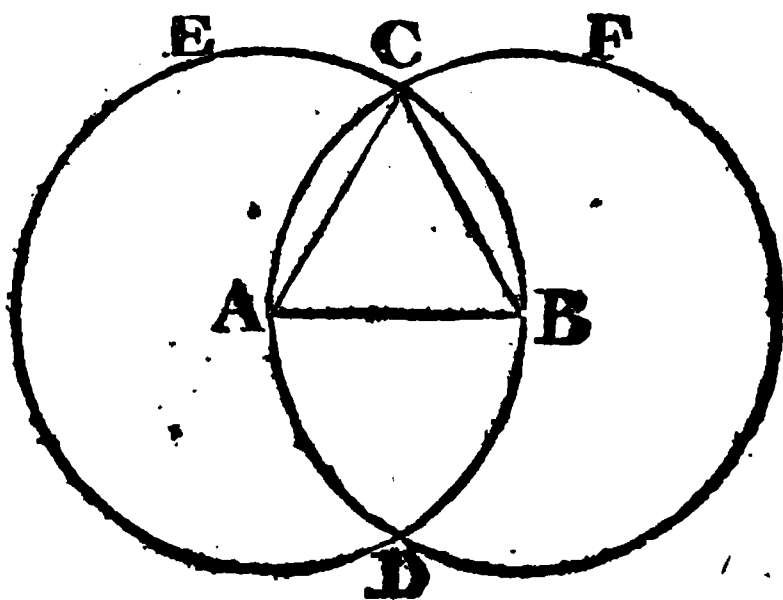
Theorema est propositio in qua proprietas quædam aut veritas de aliqua re jam facta & in figura jam constructa, proponitur demonstranda: & conclusionis formula semper est. Quod erat demonstrandum.

Corollarium est consecutarium quod ex facta jam demonstratione tanquam lucrum aliquod colligitur.

Lemma est demonstratio præmissæ aliqujus, ut quæsitæ demonstratio clarior evadat & brevior.

PROPOSITIO. I.

Probl. I. *Super data recta terminata AB triangulum aqualaterum constituere.*



CON-

CONSTRUCTIO.

I. Centro A radio AB, ^a de. ^a Post. 3.
scribe circulum BCE.

II. Centro B, eodem radio
BA, ^a describe circulum ACF.

3. Ex puncto intersectionis
C ^b duc rectas CA. CB. ^b Post. 1.

Dico triangulum ABC esse æ-
quilaterum.

DEMONSTRATIO.

$$\begin{array}{l} AB \propto AC. \\ BA \propto BC. \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} AB \\ BA \end{array}} \right\} c \quad \text{f Def. 15.}$$

$$\text{Ergo } AC \propto BC. \quad d \quad \text{d Ax. I.}$$

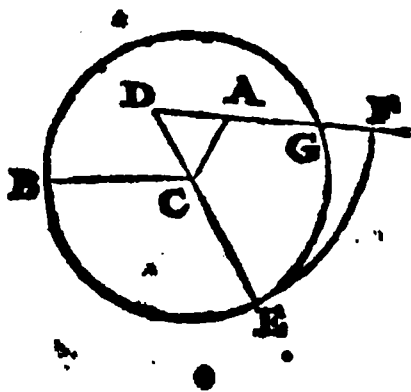
Adeoque triangulum ABC est
æquilaterum. Quod erat facien- ^e Def. 24.
dum.

Pro-

PROPOSITIO. II.

Prob. 2.

*Ad datum punctum A data
recta BC æqualem rectam AF
ponere.*



CONSTRUCTIO.

1. Ducatur a C ad A recta
a Post. 1. CA.
2. Super CA^b fiat triangulum
b 1. L. æquilaterum. CDA.
3. Centro C, radio CB de-
c Post. 3. scribe^c circulum.
4. Latus DC^d produc usque
d Post. 2. ad Circumferentiam in E.
5. Centro D radio DE^e de-
e Post. 3. scribe arcum circuli EF.
6. De-

6. Denique latus DA ^f pro- ^f Post. 2.
ducusque ad istum arcum in F.

Dico lineam AF esse æqua-
lem datæ BC.

DEMONSTRATIO.

$$S \begin{cases} DF \propto DE. & g. \\ DA \propto DC. & h. \end{cases}$$

g Def. 15

h Def.
24.

$$AF \propto CE. i.$$

i Ax. 2.

$$\text{Atqui } BC \propto CE. k.$$

k Def. 15.

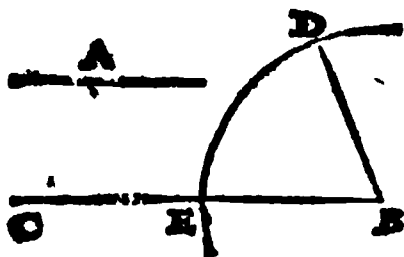
$$\text{Ergo } AF \propto BC. l. \text{ Q. E. F.}$$

l Ax. 1.

Probl. 3.

PROPOSITIO. III.

Datis duabus rectis inaequalibus A & BC; de majori BC minori A æqualem rectam BE detrabere.



CONSTRUCTIO.

1. Ad lineæ CB extremitatem
- a. 2. 1. B, sub quolibet angulo ^a pono rectam BD æqualem minori A.
- b. Post. 3. 2. Centro B radio BD ^b describo arcum circuli, secantem rectam CB in E.

Dico lineam BE esse æqualem ipsi A.

De-

DEMONSTRATIO.

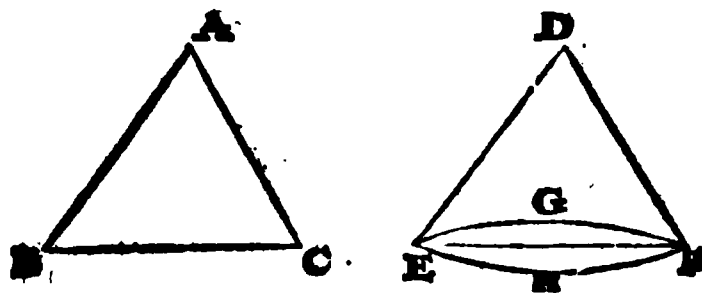
^c Quia sunt
 $BE \propto BD$ ^c radii ejus- ^c Def. 15.
 dem circuli.
 Atqui $A \propto BD$ ^d Per con-
 structionem.

Ergo $BE \propto A$. ^d Q. E. F. ^d Ax. 11.

PROPOSITIO. IV.

THEOR. I.

Si in triangulis ABC. DEF, unum latus AB, uni DE: & alterum AC alteri DF sit equalis; ut & anguli A. Distis lateribus contenti sint equales: Er-rit quoque basis BC equalis EF, angulus B angulo E: ut & C ipsi F; Et triangulum ABC æquale triangulo DEF.



DEMONSTRATIO.

Concipiamus Triangulum DEF superimponi triangulo ABC, ita ut punctum E cadat in

LIBER PRIMUS. 45

in B, & latus ED super BA; quando punctum D præcise cadet in A, quia latera AB & DE dantur æqualia. a

Deinde latus DF cadet super AC, quia anguli BAC. EDF ponuntur æquales. a

Denique punctum F necessario cadet in C, quia latera AC. DF sunt æqualia. a

a Ax. 8.

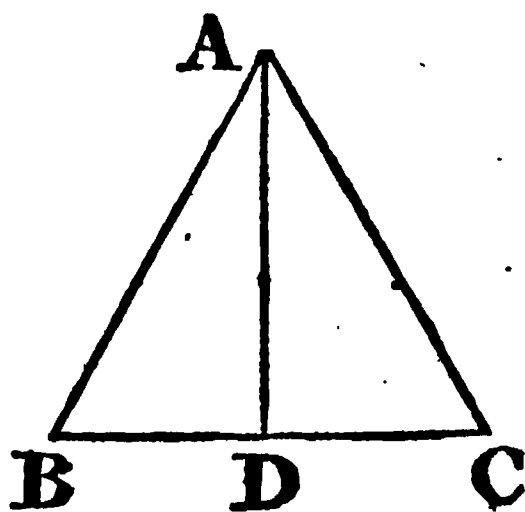
Ergo punctum E idem erit cum B; & F cum C. Ergo linea EF congruet cum AC, adeoque ipsi erit æqualis: & omnes anguli congruent, ut & tota triangula: quare illa sunt æqualia. a

Q. E. D.

PROPOSITIO. V.

THEOR. 2.

*Isoſcelis Trianguli AEC qui ad
baſin ſunt anguli ABC . ACB in-
ter ſe ſunt æquales.*



PRÆPARATIO.

Per prop: 9 ſequentem (quæ
ab hac non dependet) angulum
 BAC divide bifariam recta linea
 AD .

D E.

DEMONSTRATIO.

In Triangulis ADB. ADC.

Latus AB \propto AC. per ipsum
triangulum.

Latus AD, utrique commune a-
deoque sibi ipsi æquale.

Angulus BAD \propto CAD per con-
structionem.

Ergo angulus ABD \propto ACD.

Q. E. D.

24. I.

COROLLARIUM I.

Omne triangulum æquilaterum
est æquiangulum.

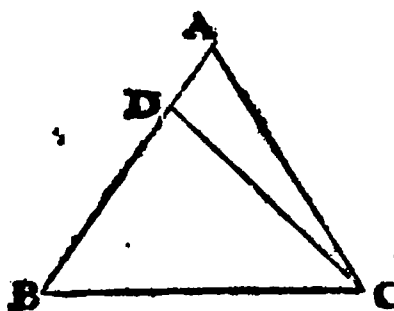
COROLLARIUM II.

Si in triangulo Isoscèle vel æquilatero,
ABC, lineâ AD bifecet angulum A, il-
la etiam oppositum latus BC bifariam di-
videt; ut & ipsâ BC perpendicularis erit.

PRO-

Theor. 3,

PROPOSITIO. VI.



*Si trianguli ABC,
duo anguli ABC. ACB.
inter se aequales fuerint;
latera aequalibus angulis
opposita AB. AC. etiam
inter se erunt aequalia.*

DEMONSTRATIO.

Aut est $AB < AC$.

Aut est $AB > AC$.

Aut est $AB \propto AC$.

Ponatur $AB < AC$.

Abscindatur $DB \propto AC$, tunc ducta
DC. erit in \triangle lis DBC. ACB.

Latus $DB \propto AC$. per construct;

$BC \propto BC$. seu commune,

• 4. I. Angulus DBC \propto ACB.

Ergo erit \triangle lum DBC $\propto \triangle$ lo
ACB, sc: pars. & totum. Quod est ab-
surdum; adeoque non potest esse $AB <$
 AC .

Pa.

Ponatur deinde $AB > AC$.

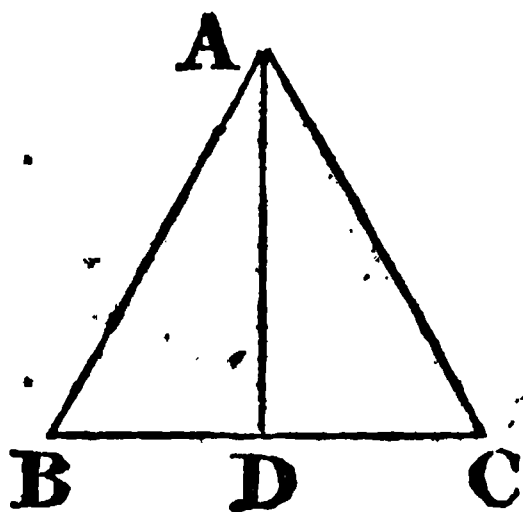
Nec hoc posse esse eodem modo probatur ab AC abscindendo partem æqualem lateri AB .

Adeoque cum nequeat esse $AB < AC$.

Nec $AB > AC$.
Necessario erit $AB \propto AC$.

SCHOLIUM.

Non mius forsan quibusdam arridebit demonstratio quam inverso parumper propositionum ordine hoc modo proponemus.



PRÆPARATIO.

Angulum BAC , ut ante
divide bifariam recta AD .

DEMONSTRATIO.

In triangulis ADB , ADC .
Latus AD utrique commune
sibi ipsi est æquale.

Angulus $B \approx C$, per proposi-
tionem.

Angulus $BAD \approx CAD$ per
constructionem.

Ergo

Ergo per 26 sequentem
(quæ ab hac non dependet)
Latus $AB \propto AC$. Q. E. D.

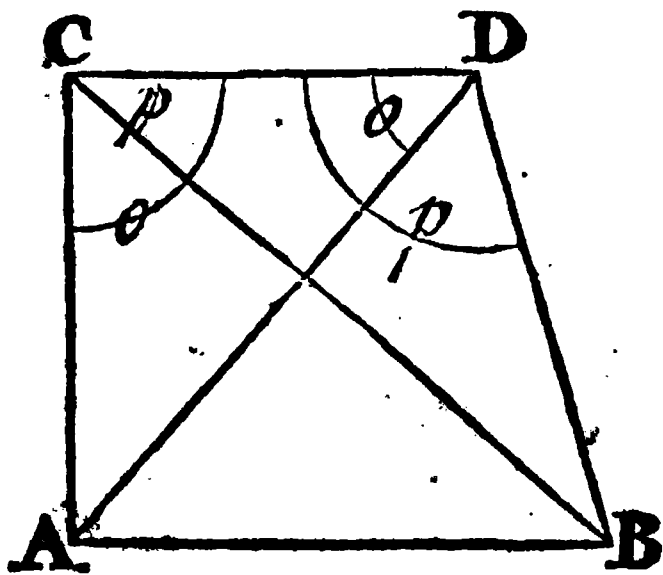
COROLLARIUM.

Omne Triangulum æqui-
angulum est æquilaterum.

PROPOSITIO. VII.

Theor. 4.

Si a linea AB extremitatibus A. B. ad datum aliquod punctum C ductæ fuerint duæ lineæ AC. BC. extra illud punctum C nullum datur aliud punctum, ad quod ab A & B duæ lineæ possint duci, quæ jam ductis lineis AC. BC sint æquales.



De.

DEMONSTRATIO.

Si tale punctum contendat Adversarius dari posse : dabitur vel extra vel intra triangulum ABC. vel in alterutro laterum.

Ponatur extra triangulum in D.
Ducta CD. erit in triangulo
ACD

Latus AC \propto AD. juxta Adversarium.

Ergo angulus ACD \propto ADC; a 5. l. qui eadem litera O insigniantur.

Deinde in triangulo BCD.
Latus BC \propto BD. iterum juxta Adv.

Ergo angulus BCD \propto BDC qui eadem litera P notentur.

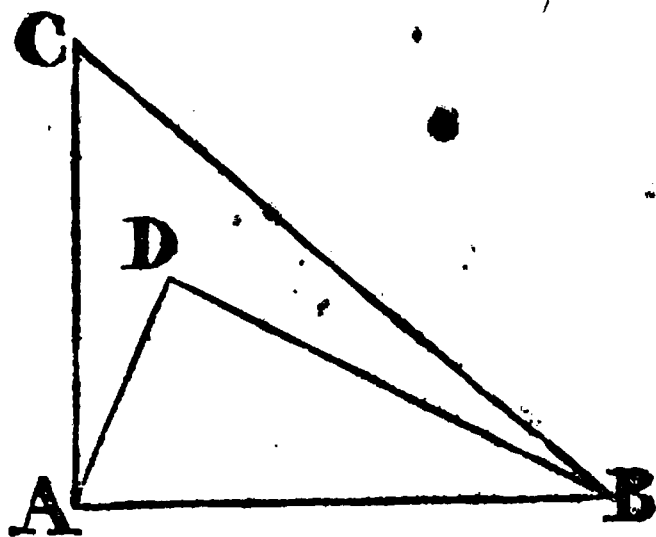
Jam angulus O, a parte sinistra est major angulo P, a dextra vero minor; quod est absurdum.

At-

Atqui eadem demonstratio
obtinet in omnibus punctis extra
triangulum.

Ergo nullum omnino extra
triangulum datur tale punctum.

Ponatur intra triangulum in D.



A (Latus AC \propto AD) juxta Ad.
(Latus BC \propto BD.) versarium.

Ergo AC \perp CB \propto AD \perp DB.
contra sequentem propos. 21. quæ ab
hac non dependet.

Cum jam eadem demonstra-
tionis

tionis forma applicari possit omnibus punctis intra triangulum ABC.

Sequitur nullum tale punctum intra illud dari.

Ponatur in alterutro laterum
AC. BC.

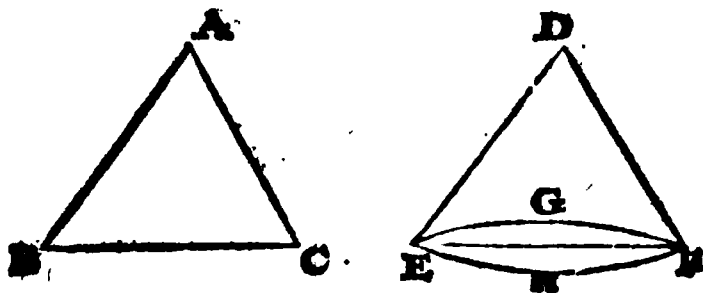
Nec ibi illud punctum potest inveniri, quia tum pars foret, æqualis suo toti contra AX. 9.

Ergo universim concludimus extra punctum C nullum omnino aliud dari posse, ad quod duæ lineæ æquales ipsis AC. BC duci queant. Q. E. D.

PROPOSITIO. IV.

THEOR. I.

Si in triangulis ABC. DEF, unum latus AB, uni DE: & alterum AC alteri DF sit equalis; ut & anguli A. Distis lateribus contenti sint equales: Er-rit quoque basis BC equalis EF, angulus B angulo E: ut & C ipsi F; Et triangulum ABC & quale triangulo DEF.



DEMONSTRATIO.

Concipiamus Triangulum DEF superimponi triangulo ABC, ita ut punctum E cadat in

LIBER PRIMUS. 45

in B, & latus ED super BA; quando punctum D præcise cadet in A, quia latera AB & DE dantur æqualia. a

Deinde latus DF cadet super AC, quia anguli BAC. EDF ponuntur æquales. a

Denique punctum F necessario cadet in C, quia latera AC. DF sunt æqualia. a

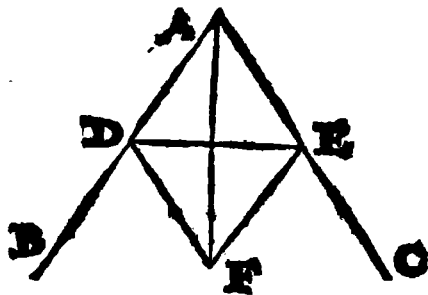
a Ax. 8.

Ergo punctum E idem erit cum B; & F cum C. Ergo linea EF congruet cum AC, adeoque ipsi erit æqualis: & omnes anguli congruent, ut & tota triangula: quare illa sunt æqualia. a

Q. E. D.

PROPOSITIO IX.

Prob. 4. Datum angulum rectilineum BAC bifariam secare.



CONSTRUCTIO.

1. Ex lateribus AB , AC abscinde
 α 3. I. α partes æquales AD . AE .
2. Super ducta DE constitue β triangulum æquilaterum DEF .
 β 1. I.
- 3 Duc rectam AF .
 Dico illam bifariam dividere angulum BAC .

DEMONSTRATIO.

In Triangulis ADF AEF .
 Latus $AD \cong AE$ } per constructio-
 Latus $DF \cong EF$ } nem.
 Latus $AF \cong AF$, quia utrique com-
 mune.

ϵ 8. I. Ergo angulus $DAF \cong EAF$. Q. E. F
 CO-

LIBER PRIMUS. 59

COROLLARIUM.

Hinc patet methodus datum angulum secandi in aequales angulos 4. 8. 16. etc. singulas nimirum partes iterum bifariam dividendo.

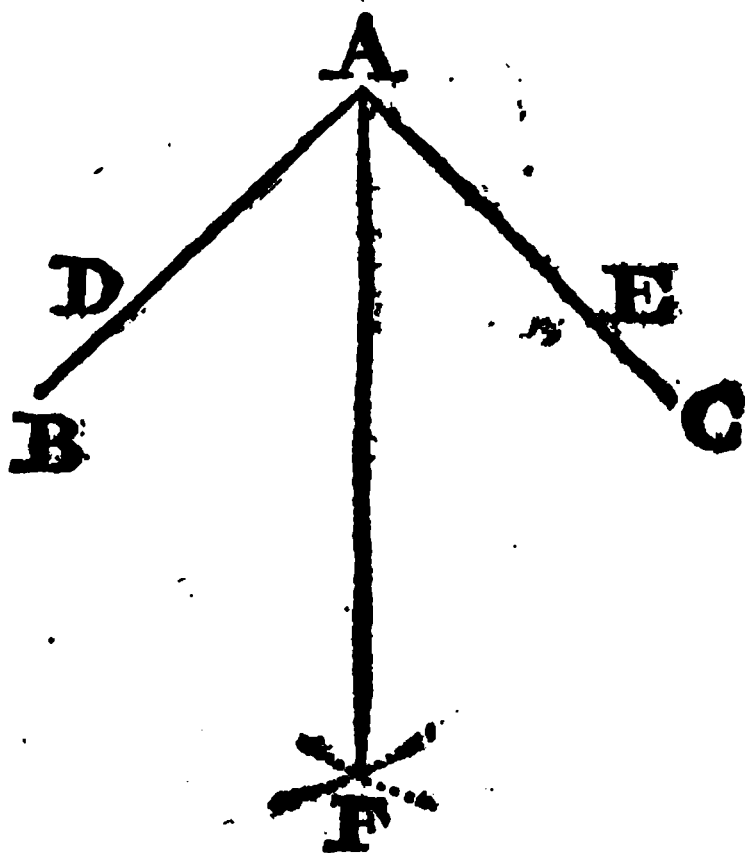
SCHOLIUM.

Potest autem propositionis constructio hoc modo in compendium redigi.

I. In lateribus AB. AC, sume aequales AD. AE.

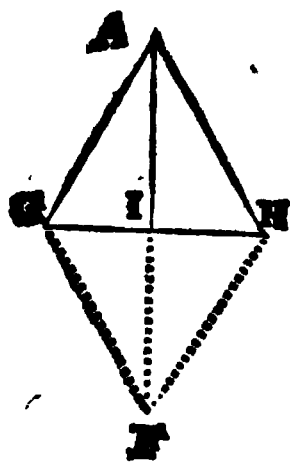
II. Centris D & E, quolibetumque radio describe duos arcus se intersecantes in F.

Quo facto recta AF angulum BAC bisecabit.



PROPOSITIO X.

Probl. 5. *Datam rectam terminatam GH
bifariam secare.*



CONSTRUCTIO.

- a 1. I. 1. Super data GH constitue ^a triangulum æquilaterum GAH.
b 9. I. 2. Angulum A divide bifariam ^b recta AF.

Dico illam lineam GH dividere bifariam.

DEMONSTRATIO.

In Triangulis AIG. AIH.

Latus GA \propto HA. per constructionem.

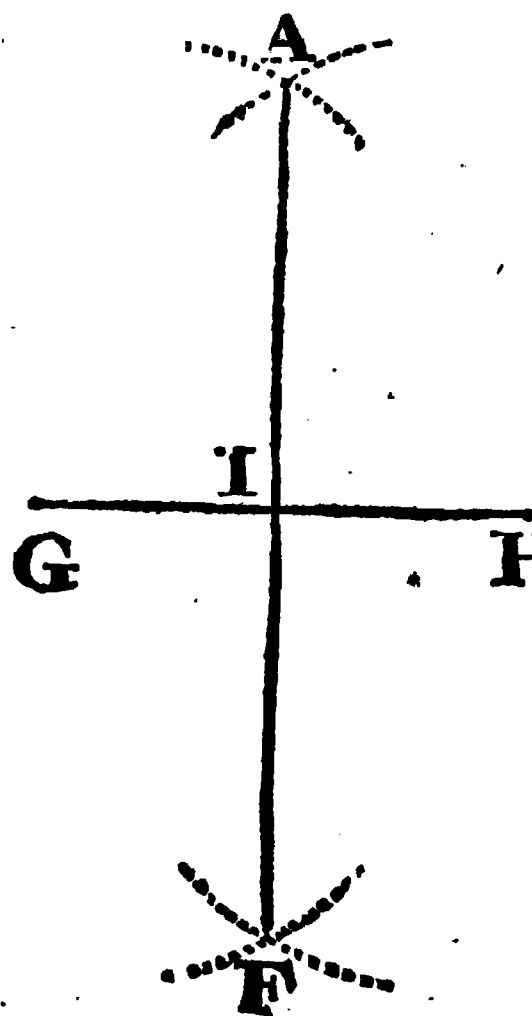
Latus

Latus $AI \propto AI$, seu utrique com-
mune.

Angulus $GAI \propto HAI$. per con-
structionem.

Ergo \therefore Basis $GI \propto IH$: adeoque linea \therefore 4. L.
 GH secta est bifariam. Q. E. F.

SCOLIUM.



Hujus ope-
rationis etiam
tale est compen-
dium.

Centris G &
 H , equali ra-
dio utrinque de-
scribantur arcus
se interfecantes
in A & F .

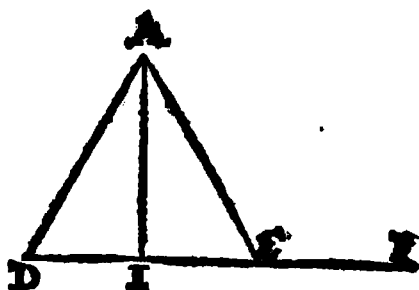
Tum recta
 AF , bisecabit
rectam GH in I .

Notandum e-
tiam pro sequen-
ti propositione
rectam AF esse

perpendicularem ipsi GH ex puncto dato I
utrimque excitatam.

PROPOSITIO XI.

*Prop. 6. Data recta DE a puncto linea
dato perpendicularem I A excitare.*



CONSTRUCTIO.

- a 3. I. 1. A puncto I utrinque sume ^a partes
inter se æquales ID. IE.
- b 1. I. 2. Super tota DE constitue ^b triangu-
lum æquilaterum DAE.
3. Duc rectam AI.
Dico illam esse perpendicularem
quæsitam.

DEMONSTRATIO.

In triangulis AID. AIE.
Latus AD \propto AE. } per constructio-
Latus ID \propto IE. } nem.
Latus AI \propto AI.

a 8. I. Ergo Angulus AID \propto AIE. Adeo-
que AI est quæsitæ ^b perpendicularis.

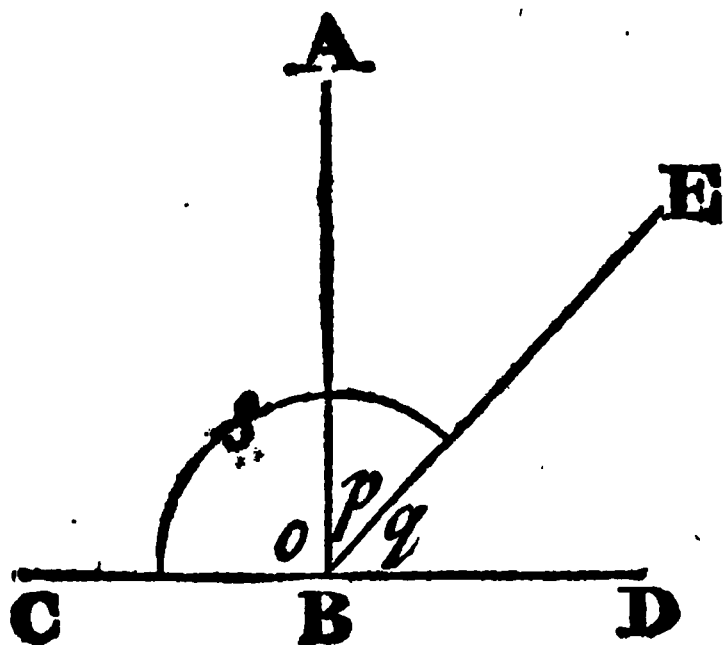
b Def. 10.

Q. E. F.

PRO-

PROPOSITIO. XIII.

Theor. 6. *Cum recta linea EB supra rectam CD consistens, angulos facit: aut duos rectos aut duobus rectis æquales efficiet.*



DEMONSTRATIO.

Recta EB cum DC aut facit utrimque æquales, adeoque ^{Def. 10.} duos rectos; aut non facit.

Si

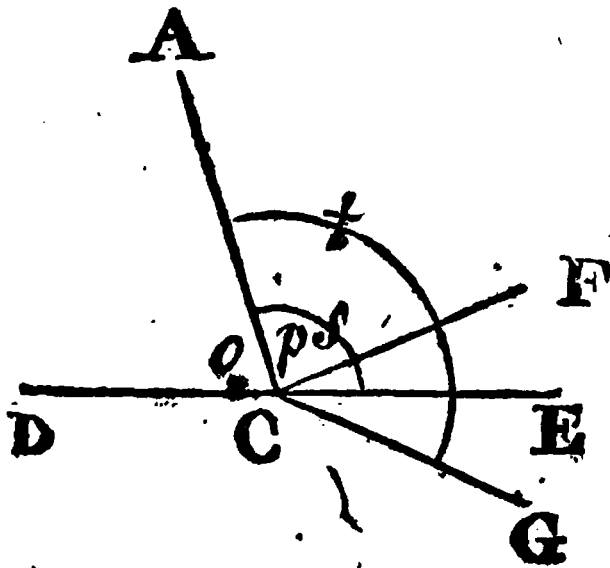
Si non facit, ex puncto B excitetur ^b perpendicularis BA: ^{brr. I.}
 eruntque duo anguli O & P
 + Q singuli recti adeoque
 $O + P + Q \propto 2 R.$
 Atqui ang: S $\propto O + P.$

Ergo $S + Q \propto 2 \text{ Rectis.}$
 Quod E. D.

PROPOSITIO. XIV.

Theor. 7.

Si ad alicujus rectæ AC punctum C duæ rectæ DC. CE non ad easdem partes ductæ angulos qui sunt deinceps O & S duobus rectis æquales fecerint, in directum erunt istæ rectæ, hoc est DCE erit una recta linea.



DEMONSTRATIO.

Si Adversarius contendat lineam CE cum CD non facere unam lineam rectam, utique aliam assignare nobis debet; illa autem assignabitur vel supra lineam CE vel infra illam.

Sit primo supra CE. ut CF.

Jam anguli O $\hat{=}$ P $\hat{=}$ 2 Rectis.

juxta

juxta Adversarium.

Atqui anguli $O \perp S \propto 2 R.$ per propositionem.

Ergo $a O \perp P \propto O \perp S.$ Et dem- a Ax. 12
to utrinque angulo O remanet $b P \propto S.$ b Ax. 12
Pars & totum quod est absurdum $c.$ c Ax. 9.

Et eadem demonstratio habet locum in omnibus lineis quæ possunt duci supra $CE.$ Ergo nulla potest duci linea supra $CE,$ quæ cum CD faciat lineam rectam.

Sit deinde infra $CE.$ ut $CG.$

Tum anguli $O \perp T \propto 2$ Rectis. juxta Adversarium.

Atqui $O \perp S \propto 2 R.$ per propositionem.

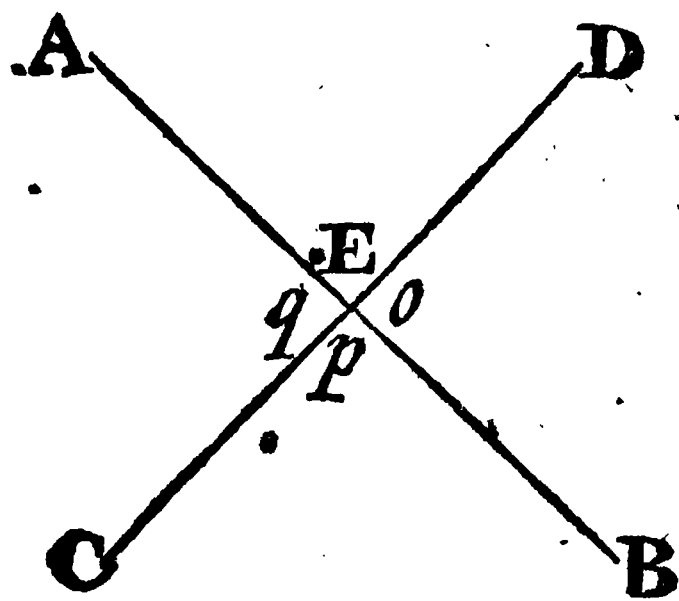
Ergo $d O \perp T \propto O \perp S.$ Et ablato d Ax. 12
utrinque angulo O remanet $T \propto S.$ To-
tum & Pars. quod e est absurdum. e Ax. 9.

Et cum eadem demonstrationis forma obtineat in omnibus lineis quæ possint duci infra $CE:$ sequitur etiam nullam infra CE posse duci. quæ cum CD facit lineam rectam. Unde concludendum erit ipsam lineam CE cum CD facere rectam $DCE.$ Q. E. D.

PROPOSITIO. XV.

Theor. 8.

Si due rectæ AB. CD se invicem secant, angulos ad verticem E oppositos, scilicet E & P æquales inter se facient.



DEMONSTRATIO.

a 13. 1.

$$\begin{array}{l} \text{Anguli } E + O \propto 2 R. \\ \text{Anguli } P + O \propto 2 R. \end{array} \Bigg|_a$$

b Ax. 1.

$$\text{Ergo}^b E + O \propto P + O.$$

ablato utrimque O.

c Ax. 3.

$$E \propto P.$$

Co-

COROLLARIUM. I.

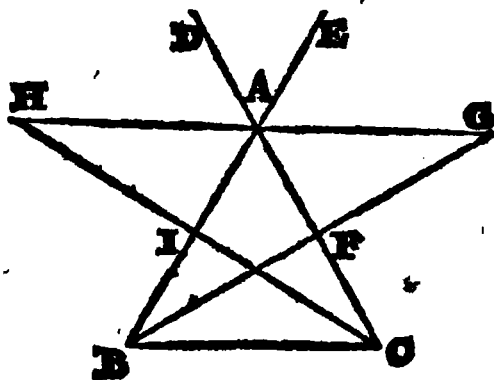
Duæ rectæ secantes se mutuo ad punctum intersectionis quatuor angulos faciunt quatuor rectis æquales.

COROLLARIUM. II.

Omnes anguli circa idem punctum constituti æquales sunt quatuor rectis.

PROPOSITIO. XVI.

Theor. 9. *Trianguli ABC uno latere
BA producto in E, externus
angulus EAC utrolibet interno
& opposito C vel B major est.*



PRÆPARATIO.

- a' 10. 1. 1. Latus AC bisecetur in F. ^a
b Post. 1. 2. Ducta BF producatur b in
& 2. G, ut BF sit \propto FG.
3. Ducatur AG.

DEMONSTRATIO.

Jam in triangulis BFC- AFG.

La-

LIBER PRIMUS. 71

Latus BF \propto FG Per con-
 Latus CF \propto AF)structio-
 nem.

Angulus BFC \propto AFG. per 15. I.

Ergo ang. ECB \propto FAG. per 4. 1.

Atqui totalis EAC externus
 major FAG.

Ergo idem EAC etiam major
 FCB. 1. C.

Eodem modo bisecando latus
 AB procedatur, & probabitur
 angulum externum DAB majorem
 esse angulo ABC.

Atqui angulus DAB \propto EAC.
 15. I.

Ergo EAC etiam est major
 quam ABC. f. B.

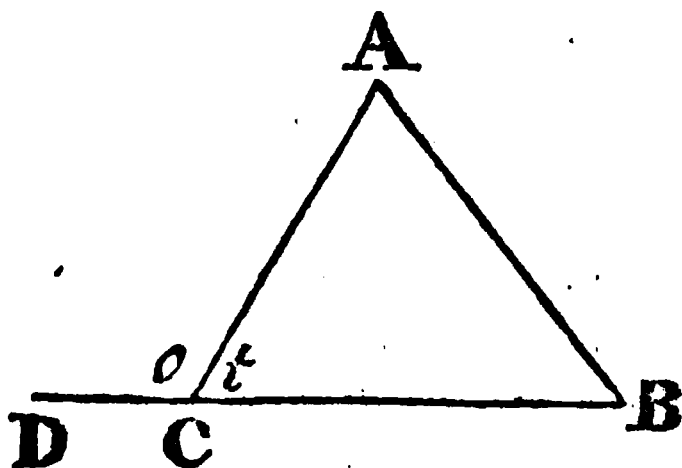
Q. E. D.

PRO-

PROPOSITIO. XVII.

Theor. 10.

*Trianguli ABC duo anguli B.
T. vel alii quilibet, quocunque
modo simul sumpti, duobus re-
ctis sunt minores.*



DEMONSTRATIO.

Producto latere BC in D.

Duo anguli $O + T \propto 2 R.$ 13. I.

Atqui $O < B.$ 16. I.

Ergo $B + T > 2 Re.$

Simili modo demonstratur

an-

angulos $A + T$ esse minores
 seu $>$ duobus Rectis.

COROLLARIUM. I.

In omni triangulo cujus unus angulus fuerit rectus vel obtusus, reliqui sunt acuti.

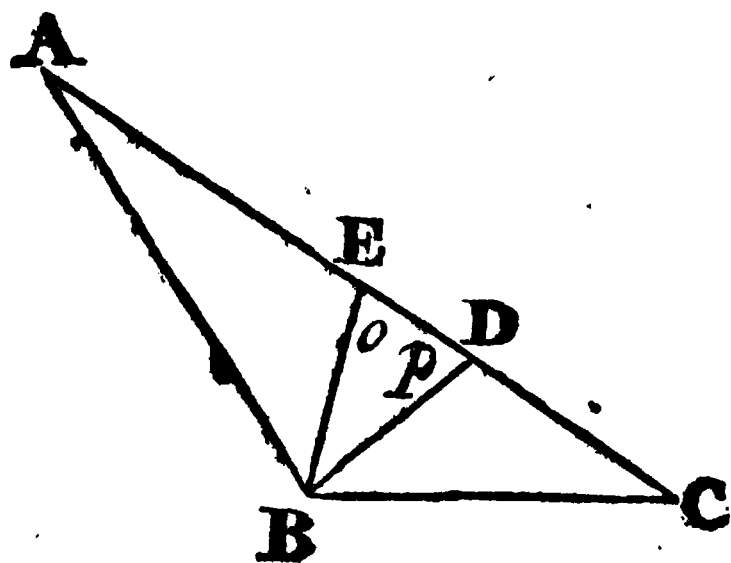
COROLLARIUM. II.

Omnes anguli trianguli æquilateri; & trianguli Iso-
 scelis anguli suprabasim sunt
 acuti.

PROPOSITIO. XVIII.

Theor.
11.

*Omnis Trianguli ABC maxi-
mo lateri AC opponitur maxi-
mus angulus ABC.*



DEMONSTRATIO.

Angulus ABC est \angle C.

A majori latere AC abscinda-
tur AD \propto AB.

a. 9. I. Ergo angulus ABD \propto P. a

b. 16. I.

Atqui P \angle C. b

Ergo ABD \angle C.

Adco-

LIBER PRIMUS. 75

Adeoque totalis ABC erit
multo $\angle C$.

Angulus ABC est $\angle A$.

A maximo latere AC abscinda-
tur CE \propto CB.

Eritque angulus EBC \propto O. ^c c. 5. I.

Atqui O \angle A. ^d d. 16. I.

Ergo EBC \angle A.

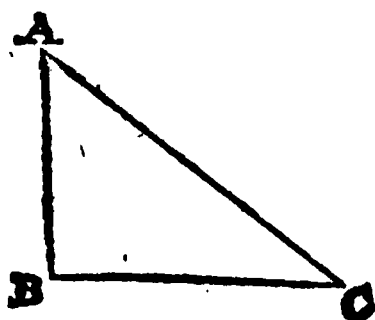
Ergo totalis ABC erit multo
 $\angle A$.

Unde jam patet angulum ABC
esse omnium maximum. Q. E. D.

PROPOSITIO. XIX.

Theor.
12.

*In omni triangulo ABC maximo
angulo B opponitur latus maxi-
mum AC.*



DEMONSTRATIO.

Aut latus AC est \propto AB.

Aut $AC > AB$.

Aut $AC < AB$.

a 5. I. Si Adversarius ponat AC \propto AB, erit \angle angulus B \propto C. quod est contra hypothesin.

Si

LIBER PRIMUS. 77

Si vero dicat esse $AC > AB$.
erit \angle angulus $B > C$: quod ^{b18. 1.}
iterum est contra hypothesin.

Ergo sequitur latus AC esse $<$
 AB .

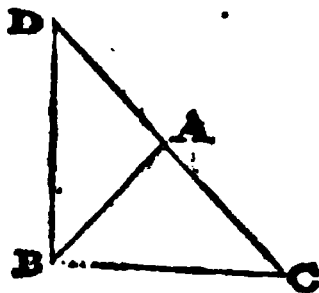
Eodem modo demonstratur
 AC esse $<$ BC .

Ergo absolute latus AC est
maximum. Q. E. D.

PROPOSITIO. XX:

Theor.
13.

Trianguli ABC duo latera scilicet AB. AC. aut alio quocunque modo simul sumpta reliquo BC sunt maiora.



PRÆPARATIO.

1. Latus AC producatur in D ut sit $AD \cong AB$.
2. Ducatur DB.

DEMONSTRATIO.

In Triangulo DAB. latus $AD \cong AB$ per construct.

Ergo angulus ABD \cong D.

Atqui angulus CBD \angle ABD.

Ergo angulus CBD etiam \angle D.

Adco-

Adeoque latus DC hoc est duo latera BA + AC. sunt ^a majora tertio ^a 19. 1. latere BC. Q. E. D.

S C H O L I U M.

Propositionis hujus veritas immediate fuit ex Archimedæa lineæ Rectæ definitione; Ad oculum enim patet. viam per quam linea fracta BAC a B ad C ducta est diversam esse, a via lineæ BC, quæ statuitur recta.

Ergo linea recta BC est omnium minima, quæ a B ad C potest duci.

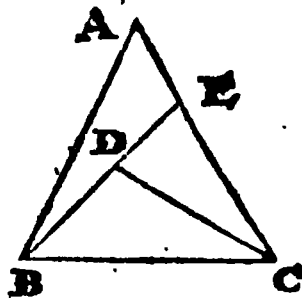
Adeoque etiam linea recta BC erit > linea fracta BAC.

Q. E. D.

PROPOSITIO XXI.

Theor.
14

Si a terminis unius lateris BC intra triangulum jungantur due rectæ BD. CE hæc lateribus trianguli BA. AC minores quidem erunt ; majorem vero angulum BDC. continebunt.



DEMONSTRATIO.

PARS I.

Producta BD in E. erit in triangulo BAE.

a 20. I.

$$A \left\{ \begin{array}{l} BA + AE < BE. \\ EC \propto EC. \end{array} \right.$$

b Ax. 4.

$$BA + AC < BE + EC.$$

Deinde in Triangulo DEC.

c 20. I.

$$A \left\{ \begin{array}{l} DE + EC < DC. \\ BD \propto BD. \end{array} \right.$$

BE

LIBER PRIMUS. 81

$BE \perp EC \angle BD \perp DC.$ ^{d d Ax. 4.}

Atqui supra $BA \perp AC \angle BE$
 $\perp EC.$

Ergo $BA \perp AC$ multo $\angle BD$
 $\perp DC.$

PARS II.

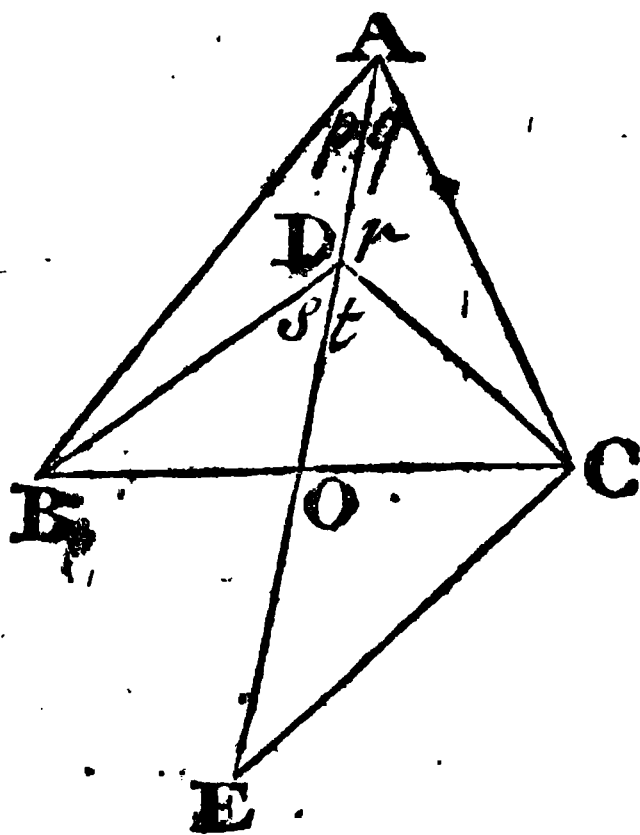
Externus angulus $BDC \angle DEC.$ ^{c 16. 1.}
 interno.

Atqui angulus $DEC \angle A$ interno. ^{f f 16. 1.}

Ergo angulus BDC multo $\angle A.$

Q.E.D.

Alia DEMONSTRATIO.



P A R S I. Duc rectam ADO.
 In triang. ADC ang. R \angle Q.
 In triang. ADB ang. D \angle P.

Ergo per 19. I.
 Latus AC \angle DC.
 Latus BA \angle BD. } A

Latera BA \perp AB \angle BD \perp DC.

Quod autem angulus R sit \angle Q sic patet. Pro-
 ducatur AO in E, ut fiat CE \propto CA. Triang.
 ACE est isosceles. Ergo ang. Q \propto E. Atqui ex-
 ternus R \angle interno E \therefore Ergo R \angle Q. Similiter
 probatur esse D \angle P.

a 5. I.

b 16. I.

c 16. I.

P A R S 2.
 A Ang. S \angle P
 Ang. T \angle Q

Ergo

Ergo $S \perp T < P \perp Q$.
Hoc $BDC < BAC$.

Vel aliter hoc modo.

P A R S I.

Per Archimedæam rectæ lineæ definitionem linea BOC est omnium brevissima, quæ a B duci possunt ad C. Ergo si a B ad C per aliam viam ducatur linea sive incurvata sive fracta, ut BAC, vel BDC. necessario illa via erit major. Patet autem ad oculum quo punctum fractionis magis a linea BEC recedat, eo viam per quam ista linea procedet esse etiam longiorem, adeoque etiam lineam esse majorem.

Atqui punctum fractionis A magis a linea BOC recedit quam D. Ergo linea BAC erit major linea BDC.

P A R S II.

Per proposit 32. 1. (quæ ab hac non dependet.)

Omnes anguli triang. DBC ∞
omnibus ang. trian. ABC.

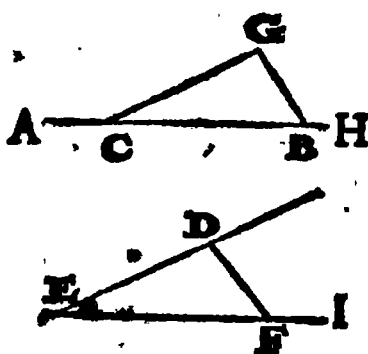
Atqui ang. DBC \perp DCB $>$ } S
ang. ABC \perp ACB.

Remanebit angulus BDC $<$ BAC.

PROPOSITIO XXIII.

Probl. 9.

*Ad data rectæ AB punctum
C angulo reſtilineo DEF æqua-
lem GCB efficere.*



1. In rectis EH . EI ſume
duo puncta D . F . illaque jun-
ge recta linea DF .

p. 22. I.

2. Tum fiat ad punctum
 C triangulum GCB , habens
latera æqualia lateribus trian-
guli EDF .

Dico angulum GCB ef-
ſe æqualem ipſi DEF .

De.

DEMONSTRATIO.

In triangulis GCB. DEF.

Latus GC \propto DE Per con-

Latus CB \propto EF str etio-

Latus BG \propto FD nem.

Ergo ^b angulus GCB \propto DEF. ^b 8.1.

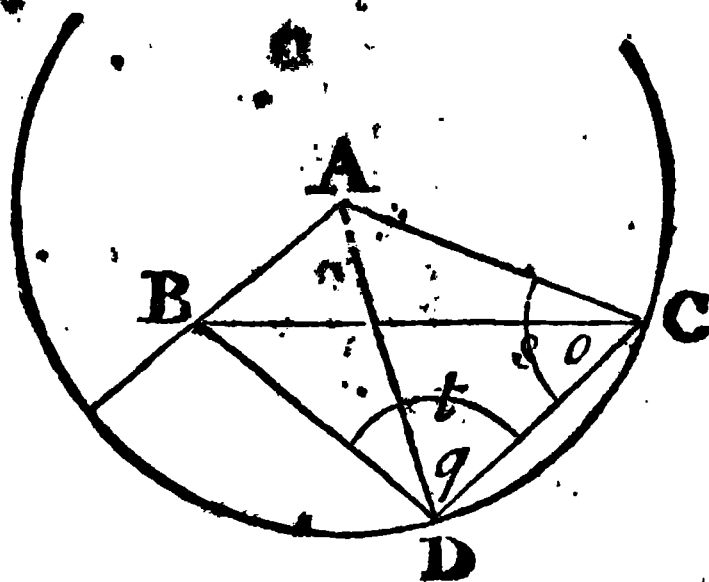
Q. E. F.

Pro-

PROPOSITIO. XXIV.

Theor. 15.

*Si duo triangula BAC. BAD
duo latera BA. AC duobus BA
AD equalia habuerint. alterum
alteri unum vero triangulum ha-
beat angulum istis lateribus con-
tentum BAC majorem altero
BAD; habebit quoque basin
BC majorem basi BD.*



PRÆPARATIO.

1. Centro A per C describe
cir.

circulum, is transibit per D, cum
AC. AD ponuntur æquales: Et
BC cadit supra D.

2. Ducatur recta DC.

DEMONSTRATIO.

In Triangulo ADC. latus AD
ponitur æquale AC. ergo angu-
lus $S \propto Q$.

Atqui $S < O$.

Ergo $Q < O$.

Adeoque T multo $< O$.

Quare cum in triangulo BCD
angulus T sit $< O$ erit latus seu
Basis BC major ^a basi BD.

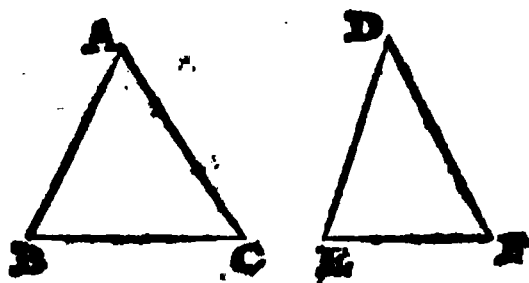
Q. E. D.

a 19. L.

PROPOSITIO XXV.

Theor.
16.

*Si duo triangula ABC. DEF
duo latera AB. AC duobus late-
ribus DE. DF equalia habue-
rint alterum alteri; unum vero
triangulum habeat basin BC ma-
jorem altera EF: habebit quoque
angulum A majorem D.*



DEMONSTRATIO.

*Si angulus A non sit \angle D.
Erit vel A ∞ D.
vel A \gt D.*

Si

Si sit $A \propto D$, erit basis
 \bullet $BC \propto EF$. contra hypothe- \bullet 4. L
 fin.

Si vero $A > D$ erit b ba- b 24. L
 sis $BC > EF$. iterum contra
 hyp.

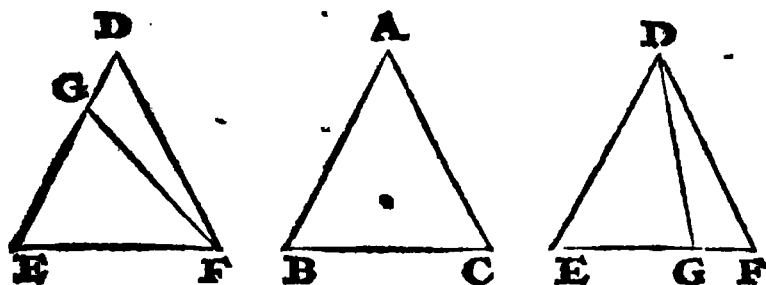
Adeoque sequitur esse angu-
 lum $A < D$.

Q. E. D.

PROPOSITIO XXVI.

Theor.
17.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis aequales habuerint, alterum alteri, & unum latus uni lateri aequale, sive quod adjacet aequalibus angulis, sive quod uni aequalium angulorum subtenditur; Illa & reliqua latera reliquis lateribus aequalia habebunt, alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo.



DEMONSTRATIO,

In Triangulis ABC. DEF sint anguli B. E. ut & C, F, æquales.

Sitque primo BC \parallel EF, sc: latera adjacentia.

si DE non sit \parallel ipsi AB; sit DE \angle AB, & abscindatur EG \parallel AB, & ducatur GF.

Tum erit in Triangulis GEF, ABC.

Latus GE \parallel AB per constructionem.

Angulus E \parallel B } Per propo-

Latus EF \parallel BC } tionem.

a 4. I.

Ergo a angulus GFE \parallel ACB,
Atqui angulus DFE \parallel ACB per propositionem.

b Ax. I.

Ergo b angulus GFE \parallel DFE, pars & totum, quod est absurdum.

c Ax. 9.

Ergo

Ergo non potest esse $DE < AB$,
Et eodem modo probatur DE non posse esse
minus latere AB :

Ergo $DE \cong AB$, adeoque triangula ABC ,
 DEF se habent juxta 4. Et omnia reliqua sunt
æqualia,

Sit deinde $AB \cong DE$, scilicet latera opposita,
Si non sit $EF \cong BC$, sit $EF < BC$, &
abscindatur $EG \cong BC$, ducaturque DG .

Tum erit in triangulis ABC, DEG .

Latus $AB \cong DE$ | per propositionem.
Angulus $B \cong E$ |
Latus $BC \cong EG$ per construct.

Ergo d Angulus $ACB \cong DGE$.

Atqui angulus $ACB \cong DFE$ per proposi- d 4. L
tionem.

Ergo angulus $DGE \cong DFE$, quod est absur-
dum, cum DGE sit externus, qui interno DFE
major est. e

e 16. L.

Ergo non potest esse $EF < BC$.

Eodem modo probabitur non posse esse
 $EF > BC$:

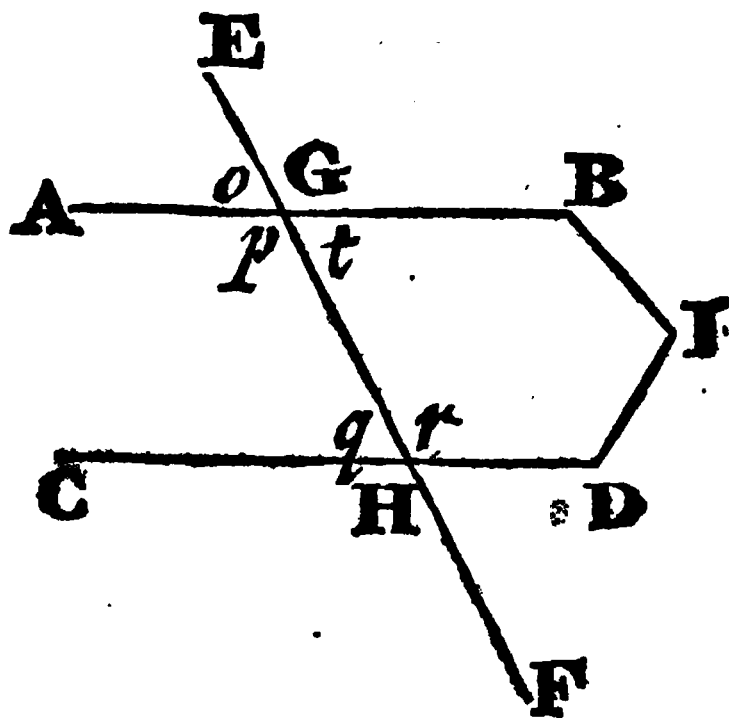
Unde sequitur esse $EF \cong BC$: Adeoque in
triangulis ABC, DEF omnia per 4 esse æqualia.

Q. E. D.

PROPOSITIO XXVII.

Theor.
18.

*Si in duas rectas AB. CD
recta EF incidens angulos alter-
nos P. R aequales faciat ; re-
ctæ erunt inter se parallelæ.*



DEMONSTRATIO.

*Si non sint parallelæ, coin-
dent*

cident puta in I , & fiet triangulum GIH .

Tum erit angulus externus $P < R$ interno. 216. 12.

Atqui per propof. angulus $P \propto R$.

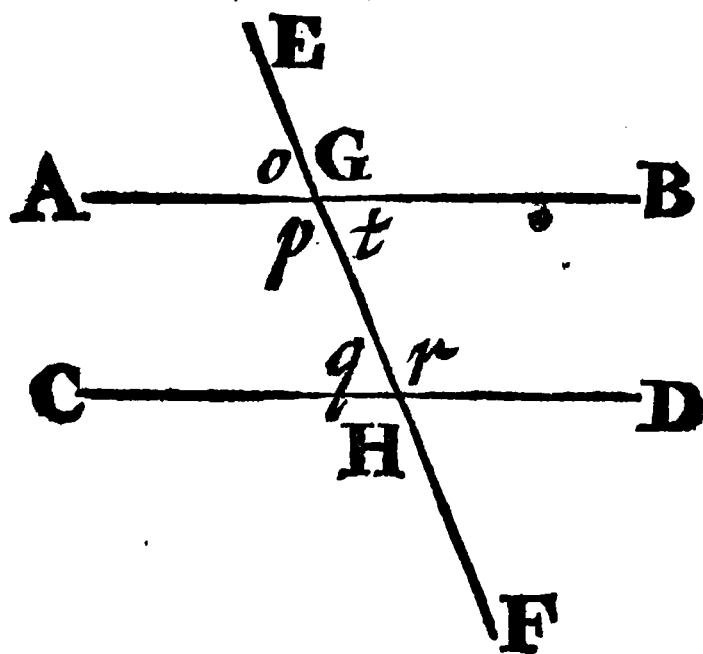
Quæ duo simul vera effe absurdum eft. Ergo lineæ non concurrent; adeoque funt parallelæ.

PROPOSITIO XXVIII.

Theor.

19.

*Si in duas rectas AB. CD
recta EF incidens faciat exter-
num angulum O æqualem interno
et ad easdem partes opposito Q :
Aut si faciat duos internos et
ad easdem partes P. Q. simul
æquales duobus rectis : parallelæ
erunt inter se rectæ AB. CD.*



DE.

DEMONSTRATIO.

PARS I.

Angulus $T \propto O$. ^a
 Atqui $Q \propto O$ per propositionem, ^{a 15. l.}

Ergo $T \propto Q$. ^b ^{b. Ax. 1.}
 Adeoque lineæ AB. CD. sunt parallelæ. ^c ^{c 27. l.}

P A R S II.

Anguli $O \perp P \propto 2$ Rectis. ^d ^{d 13. l.}
 Atqui $Q \perp P \propto 2$ Rectis per Prop.

Ergo $O \perp P \propto Q \perp P$. demto ^c Ax. 1.
 utrinque P.

$O \propto Q$.

Ergo per partem primam hujus lineæ
 AB. CD sunt parallelæ.

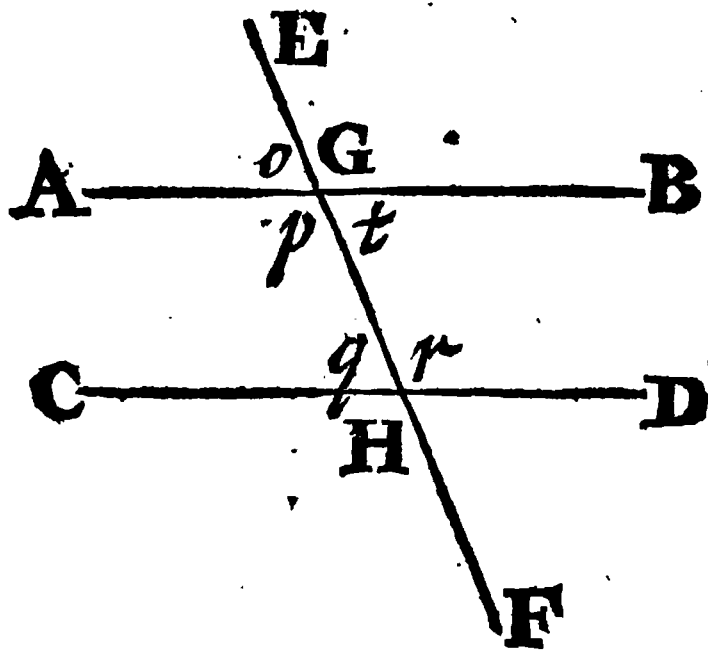
Q. E. D.

PROPOSITIO XXIX.

Theor.
29.

*Si in rectas parallelas AB.
CD recta EF incidat.*

1. *Alterni anguli T. Q inter se erunt æquales.*
2. *Externus G erit æqualis interno S ad easdem partes opposito R.*
3. *Duo interni S ad easdem partes T. R. simul erunt æquales duobus rectis.*



De.

DEMONSTRATIO.

PARS I.

Si angulus T non sit ∞Q ,
erit vel major vel minor.

Ponatur, $T \begin{smallmatrix} < \\ P \end{smallmatrix} Q. \begin{smallmatrix} \\ P \end{smallmatrix} \} A$

Erit $T + P < Q + P$.

^a Ax. 4.

Atqui $T + P \infty$ ^b 2 Rectis.

^b 13. I.

Ergo $Q + P >$ 2 Rectis:
adeoque lineæ AB. CD non
sunt ^c parallelæ: quod est con-

^c Ax. 11.

N 2

Dein-

non sunt parallelæ: quod iterum est contra Hypothesin.

Ergo est angulus $T \propto Q$.

Quod E. D.

P A R S II.

$G + T \propto 2$ Rectis.

$R + Q \propto 2$ Rectis.

} f

f 13. I.]

S { Ergo $G + T \propto R + Q$.
Atqui $T \propto Q$.

g g Ax. I.

h per partem 1.

Ergo $G \propto R$.

i Ax. 3.

P. A R S III.

$G + T \propto 2$ Rectis.

k

k 13. I.

Atqui $G \propto R$.

l

l Per partem 2.

Ergo $R + T \propto 2$ Rectis.

Q. D. E.

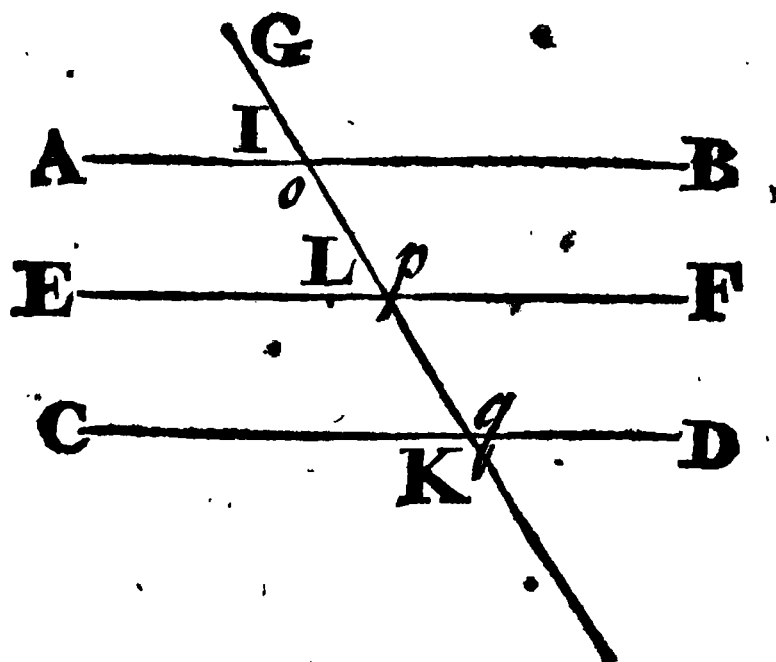
N 3

Pro-

PROPOSITIO. XXX.

Theor.
21.

*Si duæ rectæ AB. CD. sint
parallelae ad eandem EF; illæ
erunt quoque inter se parallelae.*



DEMONSTRATIO.

Ducatur per tres datas re-
ctas linea GK.

An.

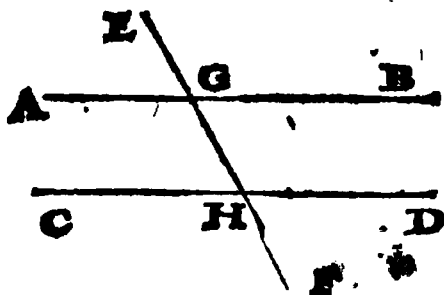
Angulus $O \propto P.$ ^a propter ^{a 29. I.}
parallelas AB. EF.

Angulus $Q \propto P.$ ^a propter
parallelas CD. EF.

Ergo ang. $O \propto Q$ alterni.
Adeoquē ^a AB. CD sunt ^b inter ^{b 27. I.}
se parallelæ.

PROPOSITIO. XXXI.

Prob. 10. *Per datum punctum G ducere lineam AB, quæ datæ CD sit parallela.*



CONSTRUCTIO.

1. Ex puncto G ad datam CD duc rectam GH sub quolibet angulo GHC .

2. Ad lineæ GH punctum
 23. I. G fac ^a angulum HGB æqualem angulo GHC .

Dico

LIBER PRIMUS. 105

Dico BG productam esse
ipſi CD parallelam.

DEMONSTRATIO.

Anguli alterni $GH\zeta$ HGB
sunt æquales per constructio-
nem. Ergo ^b lineæ AB. CD. ^{b 27. I.}
sunt parallelæ.

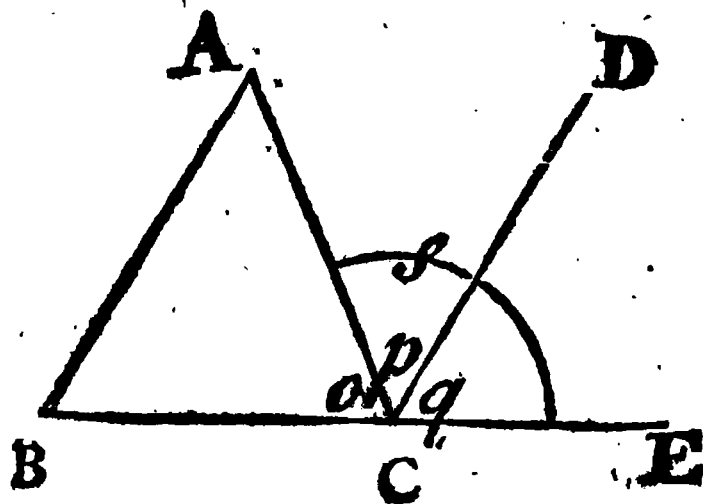
PROPOSITIO XXXII.

Theor. 22.

Trianguli ABC uno latere BC producto in E.

1. *Externus angulus S duobus internis & oppositis A & B. æqualis est.*

2. *Trianguli tres anguli A. B. C. simul sumpti duobus re-ctis æquales sunt.*



DEMONSTRATIO.

PARS I.

Ducta recta CD parallela lateri BA,
erit.

A $\left\{ \begin{array}{l} \text{Angulus } P \propto A, \text{ alterno; propter } a \text{ 29. I.} \\ \text{incidentem AC.} \\ \text{Angulus } Q \propto B, \text{ interno; propter } b \text{ 29. I.} \\ \text{incidentem BE.} \end{array} \right.$

Ergo anguli $P \perp Q$ hoc est totius
 $S \propto A \perp B. \quad Q. E. D.$

PARS 2.

Duo anguli $O \perp S \propto 2 \text{ Rectis. } c \text{ 13. I.}$
Atqui $S \propto A \perp B.$ per partem I.

Ergo tres anguli $A \perp B \perp O \propto$
 2 Rectis.

COROLLARIUM I.

Omnes anguli unius trianguli sunt
æquales tribus angulis cujuscunque alte-
rius trianguli simul sumtis; Et quando
duo sunt æquales duobus erit & tertius
æqualis tertio.

O 2

De-

COROLLARIUM II.

In triangulo Iſoſcele re-
ctangulo anguli ad baſin ſunt
ſemirecti. Et quadrati dia-
meter illius angulos bifariam
ſecat.

COROLLARIUM III.

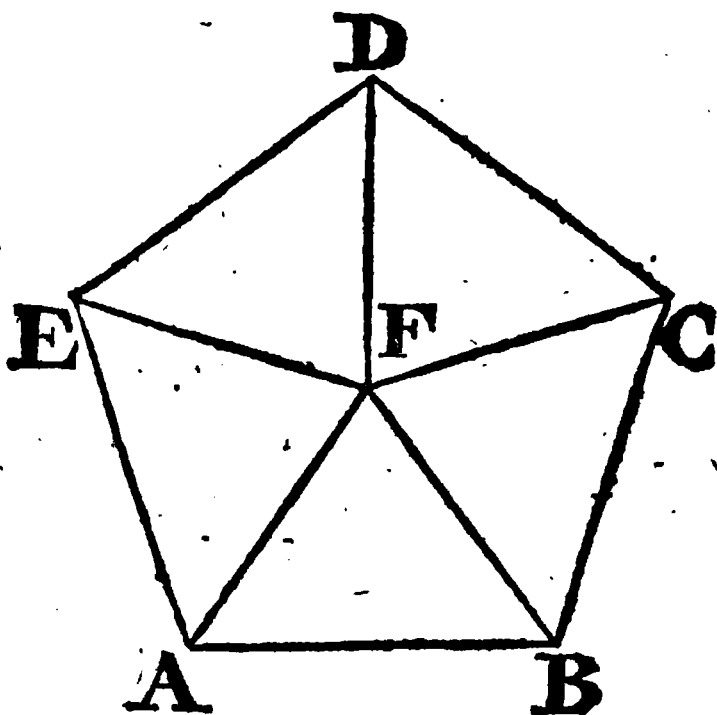
Angulus trianguli æquila-
teri eſt una tertia duorum re-
ctorum, vel duæ tertiæ unius
recti.

S C H O L I U M.

Omnis figura rectilinea
dividitur in tot triangula,
quot habet latera, demptis
duobus, & anguli triangulo-
rum conſtituunt angulos fi-
guræ.

DE

DEMONSTRATIO.



Intra quodlibet polygonum ex: gr: pentagonum $ABCDE$, sumatur aliquod punctum F , ex quo ad singulos angulos ducantur rectæ; & obtinebuntur tot triangula quot figura habet latera, adeoque hic quinque triangula.

Cum autem unumquodque triangulum contineat duos angulos rectos (per 32. I.) quinque triangula continebunt 10 angulos rectos; a quibus si demantur anguli recti quatuor circa F positi (15. I.) qui ad figuram non pertinent, remanebunt pro angulis figuræ 6 anguli recti.

Cum jam duo anguli recti contineantur in uno triangulo, 4 erunt in duobus & 6 in tribus triangulis.

Un.

Unde jam concludimus pentagonum
dividi posse in tria triangula: hoc est in
tot triangula, quot figura habet latera
demptis duobus.

Quæ demonstratio universalis est pro
omnibus polygonis; & Tabellæ sequen-
tis est fundamentum.

Latera
Trianguli
Anguli recti

3	4	5	6	7
1	2	3	4	5
2	4	6	8	10

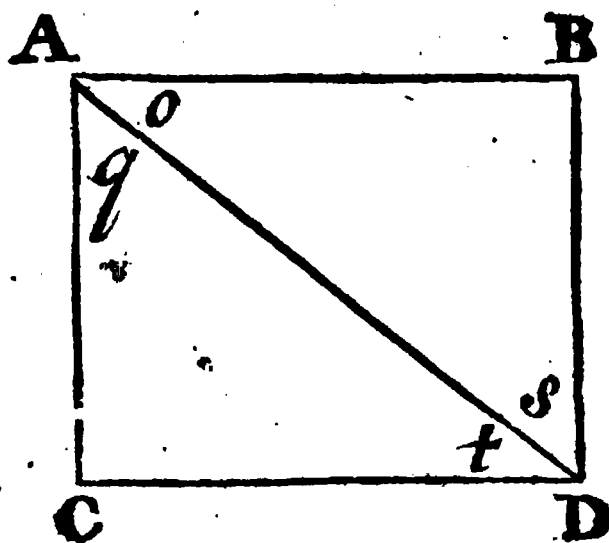
Latera
Trianguli
Anguli recti

8	9	10	11	12
6	7	8	9	10
12	14	16	18	20

Cujus hic est Sensus. Figura Ex: Gr
6 laterum, dividi potest in 4 triangula;
& illius anguli omnes vident 8 rectos.

PROPOSITIO XXXIII.

*Rectæ AC. BD quæ æquales & Theor.
parallelas AB. CD ad eadem par-^{23.}
tes conjungunt, illæ & ipsæ æquales
sunt & parallele.*



DEMONSTRATIO.

Ducta Diametro AD, in Tri-
angulis BAD. ADC.

Latus AB \propto CD per propo-
sitionem.

Angulus a O \propto T propter a 29. L.
pa-

parallelas AB. CD.

Latus AD \propto AD.

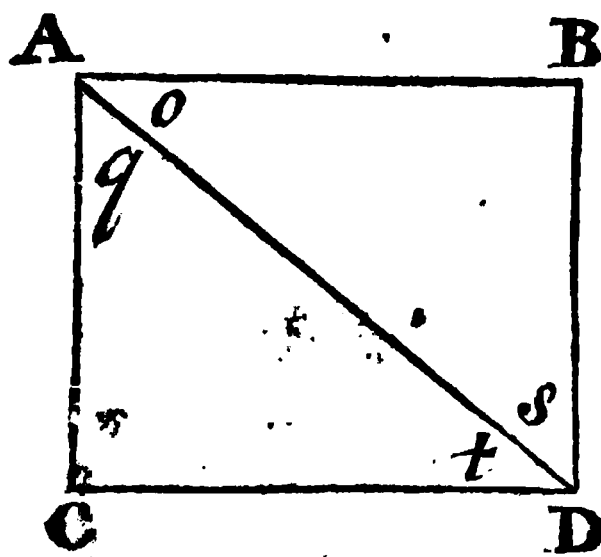
Ergo per 4. omnia sunt \propto qua-
lia, nim.

Latus AC \propto BD.

Angulus Q \propto S, adeoque

b 27. l. b AC & BD parallelæ.

PROPOSITIO XXXIV.



Theor.
24.

*Parallelogrammi
ABCD
opposita la-
tera & an-
guli æqua-
lia sunt;
ipsumque a*

Diametro secatur bifariam.

DEMONSTRATIO.

In Triangulis BAD. ADC.

Angulus $\angle O \cong \angle T$ propter parallelas $\text{a } 29. \text{ l.}$
AB. CD.

Angulus $\angle S \cong \angle Q$ propter parallelas
AC. BD.

Latus AD \cong AD.

Ergo per 26. omnia sunt æqualia; sc:

Latus AB \cong CD.

Latus BD \cong AC.

Angulus B \cong C.

Adeoque per 4. Triangula BAD.
ADC inter se sunt æqualia.

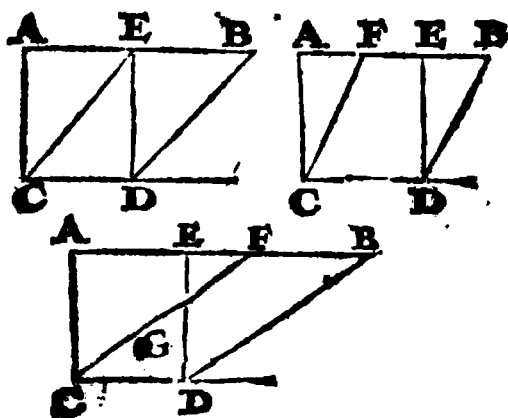
P

PRO-

PROPOSITIO. XXXV.

Theor.
25.

*Parallelogramma AD. FD.
super eadem basi CD & inter
easdem parallelas AB. CD consti-
tuta sunt equalia.*



DEMONSTRATIO.

Tres hic occurrunt casus, qui
totidem figuris exhibentur.

Ad Figuram I.

Latus AE \propto CD
Latus EB \propto CD } 34. I.

Ergo

Ergo $AE \propto EB$.

a Ax. I.

Considerentur jam duo trian-
gula EAC . BED , in quibus

Latus $EA \propto BE$.

Angulus $A \propto BED$ propter
parallelas AC . ED .

Latus $AC \propto ED$ per 34. I.

Ergo Triang. $EAC \propto$
Triang. BED Adde.
Triang. $ECD \propto ECD$.

b 4. I.

Parallelogr. $EACD \propto$ Parall.
 $BECD$.

Ad Figuram. II.

Latus $AE \propto CD$.

Latus $FB \propto CD$. 34. I.

Ergo $AE \propto FB$.
 $FE \propto FE$. S.

$AF \propto EB$.

Quare jam in Triangulis FAC .
 BED .

Latus $FA \propto BE$.

Angulus $A \propto BED$. propter
parallelas AC . ED .

Latus $AC \propto ED$. per 34. I.

e4. I.

Ergo Triang. $\triangle FAC \propto \triangle BED$.
Trap. $EFCD \propto EFCD$ } A

Parallelog. $AD \propto$ Parall. FD .

Ad Figuram III.

Latus $AE \propto CD$.
Latus $FB \propto CD$. } 34. I.

Ergo $AE \propto FB$.
 $EF \propto EF$. } A

$AF \propto EB$.

Quare iterum in triangulis
 FAC . BED .

Latus $FA \propto BE$

Angulus $A \propto BED$. ob
parallelas AC . ED .

Latus $AC \propto ED$. per 34. I.

Ergo

Ergo ^d Triang. FAC \propto Tri. ^{d 4 1}
 ang. BED. $\left. \begin{array}{l} \text{Triang. FEG} \propto \text{Tri.} \\ \text{ang. FEG.} \end{array} \right\} S$

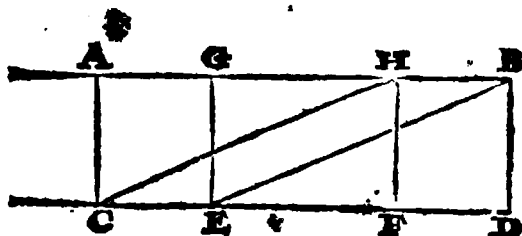
Trapezium EACG \propto Tra-
 pezio BFGD. $\left. \begin{array}{l} \text{Triang. GCD} \propto \text{GCD} \end{array} \right\} A.$

Parallelogr. AD \propto Parallel. ED.
 Q. E. D.

PROPOSITIO XXXVI.

Theor.
26.

Parallelogramma AE. HD super æqualibus basibus CE. FD, & inter easdem parallelas AB CD constituta, inter se sunt æqualia.



DEMONSTRATIO.

Ducantur rectæ CH. EB, quæ erunt
a 33. I. æquales & parallelæ. Hoc facto erit.

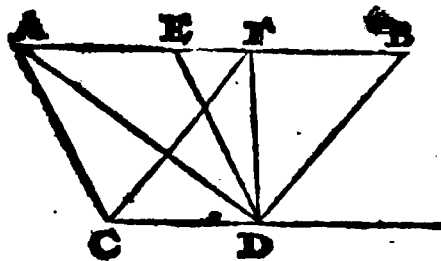
Parallelogr. AE ∽ Parall EH.
Atqui Parall. HD ∽ eiden } 5. I.
Parall: EH.

b Ax. I. Ergo b Parall. AE ∽ Parall. HD.
Q. E. D.

Pro-

PROPOSITIO XXXVII.

Triangula ACD. FCD super eadem basi CD & inter easdem parallelas AB. CD. constituta, sunt inter se equalia. Theor. 27.



DEMONSTRATIO.

Ductis DE a parallela ipsi CA : ut & DB parallela CF, erit. a 31. I.
b 35. I.
Parallelogr. ^b EC ∽ Parallelogr. BC.

Atqui Parall. EC semissis est Triangulum ACD,
Et Parallelogr. BC semissis est triangulum FCD. 34. I.

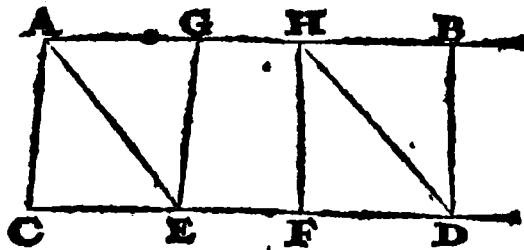
Ergo triang. ACD ∽ triang. FCD. c Ax. 7.
Q. E. D.

PA.

PROPOSITIO XXXVIII.

Theor.
28.

Triangula ACE. HFD super equalibus basibus CE. FD. & inter easdem parallelas AB. CD constituta, inter se sunt equalia.



DEMONSTRATIO.

a 31. I.

Ducatur ^a EG parallela ipsi AC & DB ipsi FH.

b 24. I.

Tum ^b Parall. CG \propto Parall. FB.

At-

Atqui dimidium CG
est Triang. ACE.

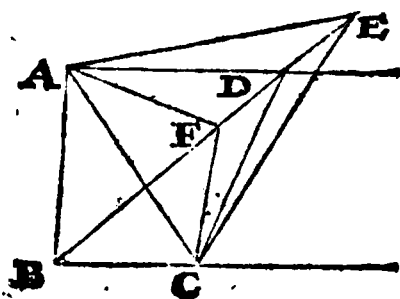
Et dimidium FB est 34. I.
Triang. HFD.

Ergo \angle triang. ACE \propto \angle 24. 7.
triang. HFD.

PROPOSITIO XXXIX.

Theor.
29.

Si triangula AEC . DBC sint equalia, & super eadem basi BC & ad easdem partes constituta: illa erunt quoque inter easdem parallelas. Hoc est AD erit parallela BC .



DEMONSTRATIO.

Si Adversarius hoc neget. Sit AE parallela ipsi BC : & producta BD in E , ducatur recta EC .

a 37. I.

Tum Triang. $ABC \propto EBC$.

Atqui Triang. $ABC \propto DBC$ per
propositionem.

Er-

Ergo Triang. ^b EBC \propto DBC. To- ^b Ax. 1.
tum & pars quod est absurdum.

Et eadem demonstratio obtinet in o- ^c Ax. 9.
mnibus lineis quæ possunt duci supra
AD.

Quare concludendum est nullam li-
neam posse duci supra AD, quæ sit ip-
si BC parallela.

Quod si adversarius contendat lineam
AF esse parallelam BC, eadem demon-
strationis forma ipsum ad absurdum de-
ducimus; & probabimus nullam lineam
infra AD posse duci quæ ipsi BC sit
parallela.

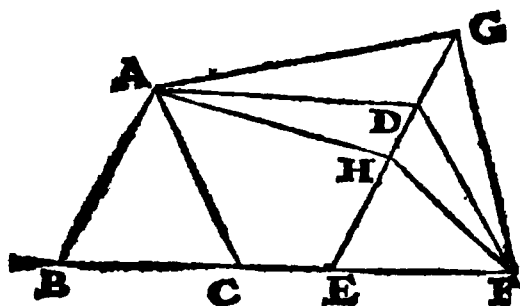
Ergo recte hinc concludimus ipsam li-
neam AD esse parallelam BC:

Q. E. D.

PROPOSITIO XL.

Theor.
30.

Si triangula ABC . DEF sint equalia, & super equalibus basibus BC . EF , & ad easdem partes constituta: Illa erunt quoque inter easdem parallelas AD . BF .



DEMONSTRATIO.

Si AD juxta Adversarium non fit parallela BF ; fit AG supra AD ducta, ipsi BF parallela: & producta ED in G , ducatur GF .

38. I.

Tum erit \triangle triang. $ABC \cong$ triang. GEF .

Atqui idem triang. $ABC \cong$ triang. DEF . per prop.

Ergo

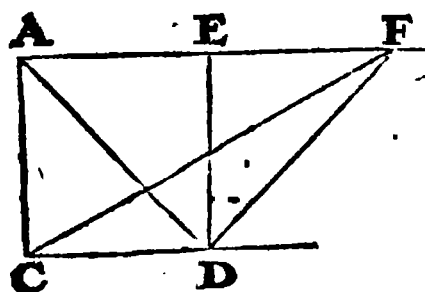
Ergo ^btriang. GEF \propto DEF. Totum & pars; quod est ^cabsurdum. b Ax. 1.
c Ax. 9.

Adeoque linea AG non est parallela BF: nec ulla quæ supra AD posset duci.

Et eodem modo demonstratur nec AH nec ullam aliam quæ infra AD posset duci, esse parallelam ipsi BF.

Ergo concludimus iterum ipsam lineam AD esse parallelam BF. Q. E. D.

PROPOSITIO XLI.

Theor.
31.

*Si parallelogram-
mum AECD
communem cum
triangulo FCD
basin CD habue-
rit, & in iisdem parallelis AF.
CD fuerit: parallelogrammum e-
rit duplum trianguli.*

DEMONSTRATIO.

a 37. I. Ducta AD erit triang. ^a ACD \propto tri-
ang. FCD.

b 34. I. Atqui ^b parallelogr. AECD est du-
plum triang. ACD.

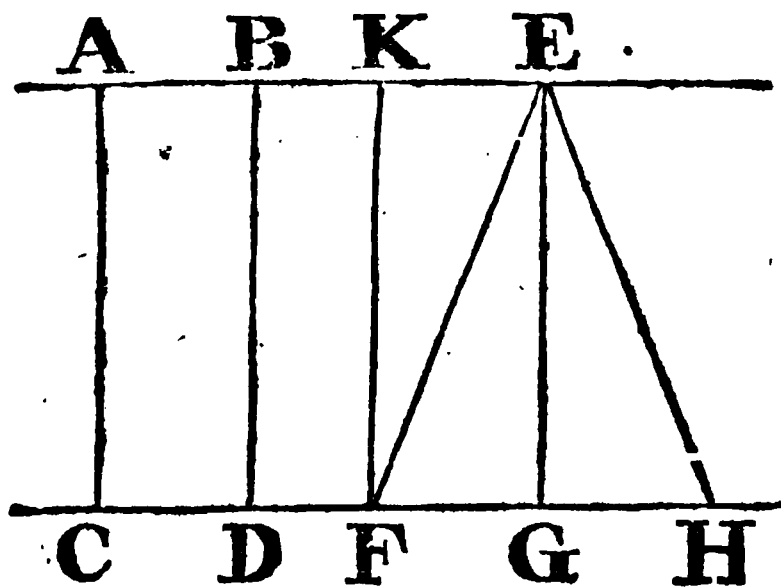
Ergo etiam parall. AECD est duplum
triang. FCD.

SCHOLIUM.

Imo etiam si parallelogrammum
ABDC cum triangulo EFG æqua-
les bases CD, FG, habuerit & in iisdem
fuerit parallelis, parallelog. trianguli
duplum erit.

De-

DEMONSTRATIO.



Ducta FK parallela GE, erit.

Parallelog. AD \propto Parall. KG. 36. I.

Atqui Parall. KG est duplum Trianguli EFG. per 34. I.

Ergo etiam Parall. AD ejusdem trianguli duplum erit.

Præterea si Trianguli EFH cum Parallelogr. AD inter easdem parallelas existentis, basis FH fuerit dupla baseos CD erit triangulum EFH \propto parallegr. AD.

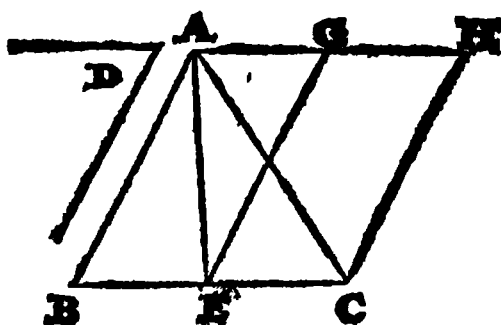
DEMONSTRATIO.

Triang. EFG \propto triang. EHG (38. I.)

Ergo totum triangulum EFH est duplum trianguli EFG: atqui modo demonstratum est esse parallegr. AD duplum ejusdem trianguli EFG. Ergo erit parall. AD \propto triang. EFG. PRO

PROPOSITIO XLII.

Prob. II.



Dato triangulo
 ABC aequale paral-
 lelogrammum GC
 construere, habens
 angulum aequalem
 angulo dato D.

CONSTRUCTIO.

- a 10. I. 1. Divide ^abasin BC bifariam in E,
 & duc rectam AE.
 b 31. I. 2. Duc lineam AH parallelam BC.
 3. Ex E duc rectam EG ut angulus
 GEC sit æqualis angulo dato D.
 4. Age CH parallelam EG.
 Dico GC esse parallelogrammum
 quæsitum.

DEMONSTRATIO.

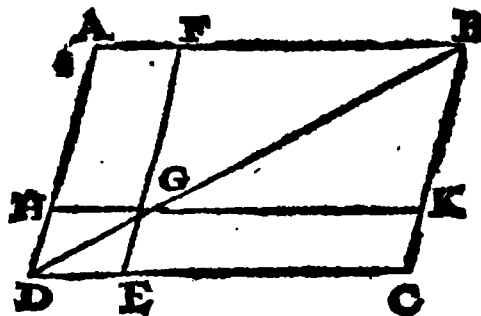
- a 38. I. Triang. AEB \propto triang. AEC.
 Ergo triang. ABC est duplum triang.
 AEC
 b 41. I.] Atqui Parall. GC ^b est duplum ejusdem
 triang. AEC.

- c Ax. 6. Ergo triang. ABC \propto Parall. GC. c
 Cum jam angulus GEC per constru-
 ctionem sit \propto angulo dato D; patet fa-
 ctum esse quod quæritur.

Pro

PROPOSITIO. XLIII.

*Omnis parallelogrammi AC^{Theor³²}
complementa AG. GC. sunt inter
se equalia.*



DEMONSTRATIO.

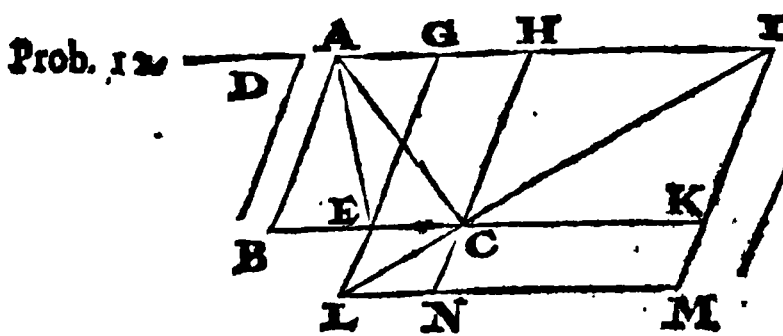
$$S \left(\begin{array}{l} \text{Triang. BAD} \propto \text{Triang. BCD.} \\ \text{Triang. BFG} + \text{GHD} \\ \propto \text{tri. BKG} + \text{GED} \end{array} \right) 34. I.$$

Remanet compl. AG \propto
compl. GC. Q. E. D. ^{a Ax. 3.}

R

Pro-

PROPOSITIO XLIV.



Ad datam
rectam Fda -
to triangulo
 ABC æquale
parallelo-
grammum

CM applicare habens angulum æqualem an-
gulo dato D .

CONSTRUCTIO.

- a 42. I. 1. Constitue a parallelogrammum CG
æquale triangulo ABC , & habens angu-
lum GEC \propto angulo D .
- b 3. I. 2. Produge b BC in K , ut CK sit \propto
datæ F .
- c 31. I. 3. Age KI parallelam c CH , quæ
productæ AH occurrat in I .
4. Ex I per C ducatur IC . quæ pro-
ductæ GE occurrat in L .
- 5 Ducatur LM parallelâ BK , quæ
productæ IK occurrat in M .
6. Denique producatur HC in N .

Dico CM esse parallelogrammum-
quæsitum.

De-

DEMONSTRATIO.

Triang. $ABC \propto$ complemento GC .
per Constr.

Compl. $CM \propto$ eidem compl. GC . ^a43. I.

Ergo triang. $ABC \propto$ compl. CM . ^b Ax. I.

Angulum autem CNM esse \propto angulo
dato D sic demonstratur.

Ang. $CNM \propto$ HCK . propter pa- ^c29. I.
rallelas CK . NM .

Ang. $HCK \propto$ GEC . propter pa-
rallelas HC . GE .

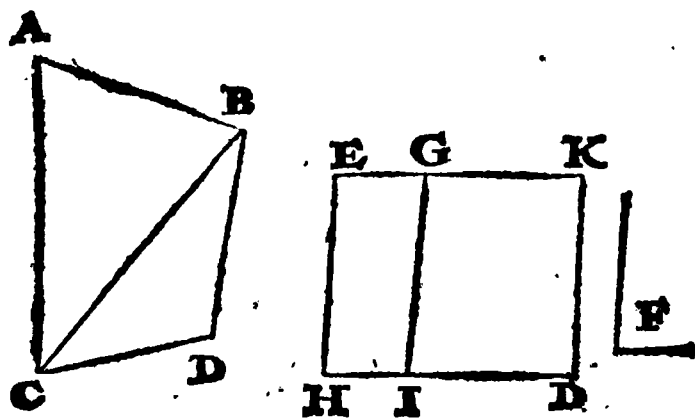
Ang. $GEC \propto$ D . per constru-
ctionem.

Ergo ang. $CNM \propto$ D . ^d Ax. I.

Cum jam denique latus CK factum
sit æquale lineæ datæ F , patet parallelo-
grammum CM quæsito satisfacere.

PROPOSITIO XLV.

Prob. 13. *Dato rectilineo AD aequale
parallelogrammum ED consti-
tuere habens angulum aequalem
angulo dato F.*



CONSTRUCTIO.

1. Ducta CB dividatur
rectilineum in triangu-
la.

2. Fiat a parallelogram-
mum EI \propto triangulo BCD,
habens angulum H \propto dato F.

3. Su-

3. Supra latus GI^b fiat parallelogrammum $GD \propto$ triangulo ABC , habens angulum $GID \propto$ ipsi H .

Dico quæsito satisfactum esse.

DEMONSTRATIO.

A { Parallelogr. $EI \propto$
triang. BCD .
Parallelogr. $GD \propto$ } per const.
triang. ABC .

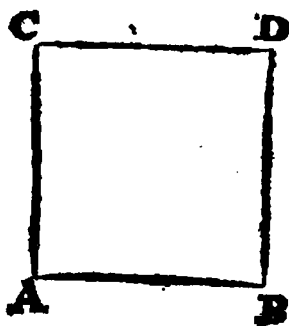
Ergo Parall. $ED \propto$ Rectilineo AD .

Q. E. F.

PROPOSITIO. XLVI.

Prob. 14.

Super data recta AB quadratum ABCD describere.



CONSTRUCTIO.

1. Ab extremitatibus A & B erige duas perpendiculares AC. BD. quæ sint æquales ipsi AB.

2. Ducatur recta CD.

Dico ABCD esse quadratum quæsitum.

DEMONSTRATIO.

Pro lateribus.

a Ax. I.

Latus AC^a ∞ BD, quia utrim-

trumque est \propto eidem AB.

Latus AC est parallelum
b BD, propter angulos rectos. ^{b 28. l.}
A. B.

Ergo ^c AB & CD sunt pa- ^{c 33. l.}
rallæ & æquales, adeoque
omnia latera æqualia eidem
AB, inter se sunt æqualia &
parallela.

Pro angulis.

In parallelogrammo AD an-
guli A. B. sunt recti. Ergo ^d e- ^{d 34. l.}
tiam oppositi D. C sunt recti.
Ergo ABDC est quadratum.

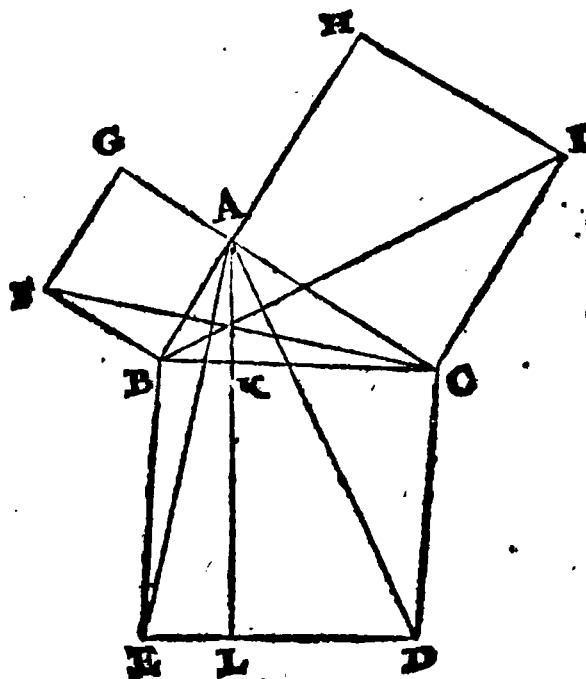
Q. E. D.

Pro-

PROPOSITIO XLVII.

Theor.
33.

*In omni triangulo rectangulo
BAC quadratum lateris BC,
quod recto angulo opponitur, æ-
quale est uobis simul reliquo-
rum late^rum BA. AC qua-
dratis.*



DEMONSTRATIO.

Ex A ducta AL parallelâ late-
ri BE, lateris BC quadratum BD
dividit

dividit in duo parallelogramma
 BL , KD :

Si jam demonstratum sit Parallelogr. KD esse \propto quadrato AI , ut & parallelogr. BL esse \propto quadrato AE , peracta res erit.

Pro Primo.

Ductis AD. BI ang. BCD \propto ACI. quia
uterque rectus.
A ang. ACB. \propto ACB.

Ang. $ACD \propto BCI$.

Ergo in triangulis ACD. BCI.

Latus AC \propto CI. } quia sunt latera eo-
Latus CD \propto BC. } rundem quadratorum.
Ang. ACD \propto BCI.

Ergo \triangle Triang. ACD triang. BCL \triangle 4. L

c Atqui parallelogr. KD est duplum triang. ACD. Quia sunt in iisdem basi- c41. l.
c Et parallelogr. AI duplum triang. BCI. sibus & pa-
rallelis.

S

Ergo

b Ax. 6.] Ergo ^b parall. KD \propto parall. seu qua-
drato AI.

Pro Secundo.

Ductis AE. CF. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ang. CBE} \propto \text{ABF.} \\ \text{quia uterque rectus.} \\ \text{A Ang. ABC. ABC.} \end{array} \right.$

Ang. ABE. \propto CBF.

Quare in triangulis ABE, CBF.

Latus AB \propto BF. | Utpote l^{te}ra eorun-
Latus BE \propto CB. | dem quadratorum.
Ang. ABE \propto CBF.

d 4. I.

Ergo Triang. ABE ^d \propto Triang.
CBF.

e 41. I.

e Atqui parallelogr. BL est | Quia sunt
duplum triang. ABE. | in iisdem
e Et parallelogr. AF duplum | basibus &
triang. CBF. | parallelis.

Ergo

Ergo parall. BL \propto parall. seu
 quadrato AF.
 Atqui antea parall KD \propto qua
 drato AI.

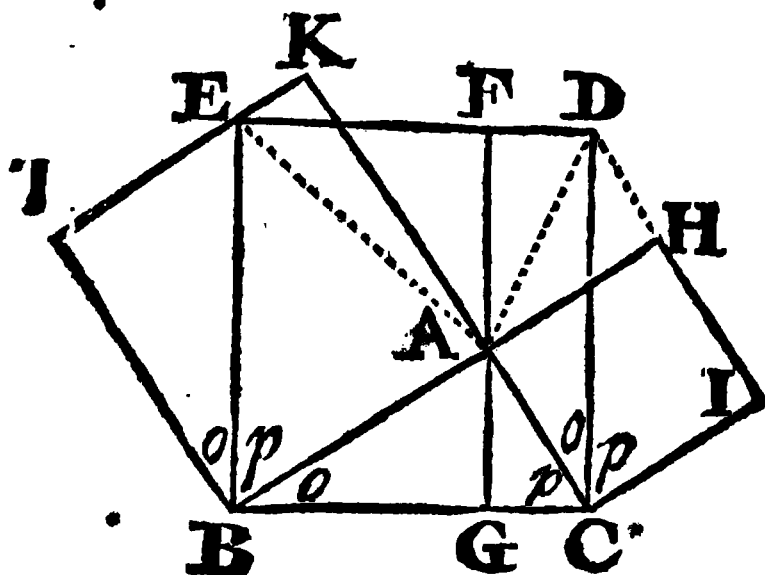
f Ax. 6.

A

Ergo Quadratum BD \propto duobus qua-
 dratis. AF. AI.

Q. E. D.

Succinctior autem & clarior est Clarissimi Sturmius demonstratio, quam in sua Mathesi enucleata, pag. 30. hoc modo proponit.



Factis faciendis, quæ apposita Figura monstrat.

□ FDCG duplum est Δ li ACD.

Atqui □ AHIC etiam est duplum Δ li ACD. 4 r. I.

Ergo □ FDCG ∝ □ AHIC.

Eodem modo.

□ FEBG duplum est Δ li AEB.

Atqui □ ABLK etiam est duplum Δ li ACD. 4 r. I.

Ergo

Ergo \square FEBG \propto \square ABLK. $\left. \vphantom{\square FEBG \propto \square ABLK.} \right\}$ Adde.
 Supra est \square FDCG \propto \square AHIC.

Eritque \square EDCB \propto \square ABLK \perp
 \square AHIC. Q. E. D.

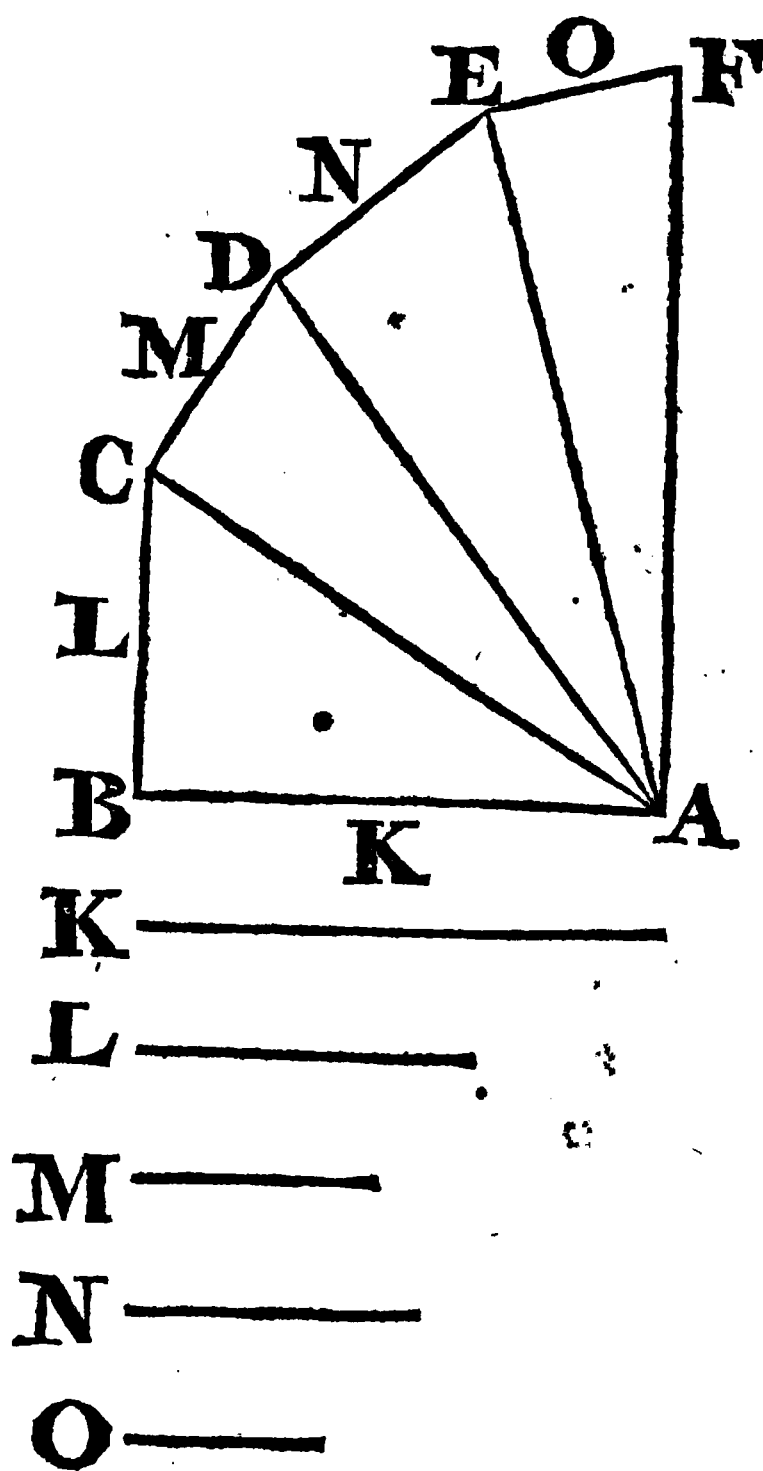
Nam quod latus BE occurrat lateri LK
 & latus BD continuato lateri LH sic patet,
 siquidem omnes anguli O, ut & P mani-
 festo æquales sunt, quia ubique O \perp P
 constituunt unum rectum.

Adeoque \triangle lūm ABC revolutum circa
 centrum B congruet cum triangulo BLE;
 revolutum autem circa centrum C, con-
 gruet cum triangulo CID.

S C H O L I U M. I.

Pulcherrimum hoc Pythagoræ inven-
 tum insigne per totam Mathesin est
 Theorema, & non paucā utilissima sup-
 peditat Problemata, quorum cum alia
 apud Clavium & alios Autores abun-
 danti satis copia videri possint, nos tria
 tantum afferemus.

PROBLEMA I.



Datis
quodli-
bet lineis
K L. M.
N. O. in-
venire
Quadra-
tum
quod o-
mnium
linearum
quadratis
simul
sumtis sit
æquale.

Constructio & Demonstratio.

1. Duas lineas K & L, junge in an-
gu-

gulo recto ABC , erit ducta recta AC :
 $\square AC \propto \square$ tis K , & L .

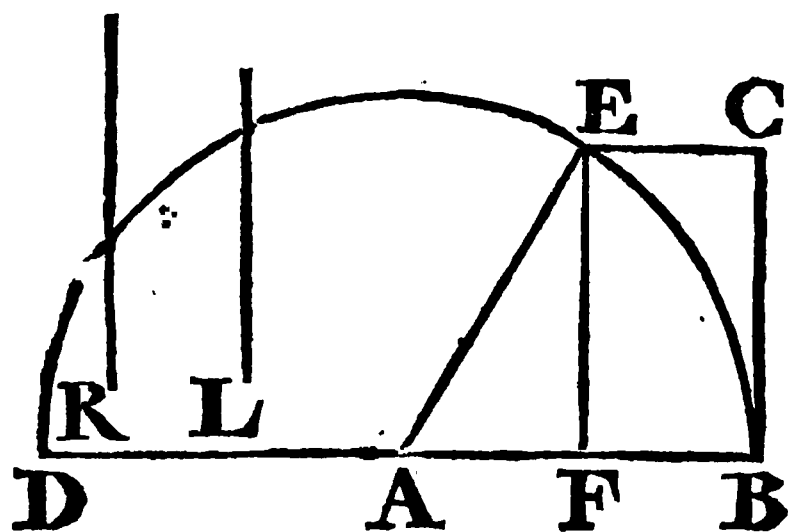
2. Facta $CD \propto M$ perpendiculari ad
 CA , erit $\square AD \propto \square$ tis. $K. L. M$.

3. Ad AD fiat perpendicularis DE
 $\propto N$, eritque $\square AE \propto \square$ tis $K. L.$
 $M. N$.

4. Ipsi AE fiat perpendicularis EF
 $\propto O$, eritque $\square AF \propto \square$ tis. $K. L. M.$
 $N. O$.

Quæ omnia sequuntur ex hac prop.
 47. cum quatuor ista triângula ABC .
 ACD . ADE . AEF . per constructio-
 nem sint rectangula.

P R O B L E M A. II.



Datis duabus lineis inæqualibus *K. L.* invenire quadratum, quo a se invicem quadrata ab illis facta differunt.

C O N S T R U C T I O.

1. Fac rectam *DB* duplam datæ majoris *K*.
2. Super illa describe Semicirculum *DEB*.
3. Fiat ipsi *DB* perpendicularis *BC* ∞ datæ *L*.
4. Ducatur *CE* ad Semicirculum, parallela *BD*.
5. Ex

5. Ex puncto E demittatur perpendicularis EF.

Tum dico $\square AF$ esse differentiam \square torum K . & L .

DEMONSTRATIO.

Ducta AE erit triangulum AEF per constructionem rectangulum; adeoque per 47. I.

$$\square AE \propto \square EF + \square AF$$

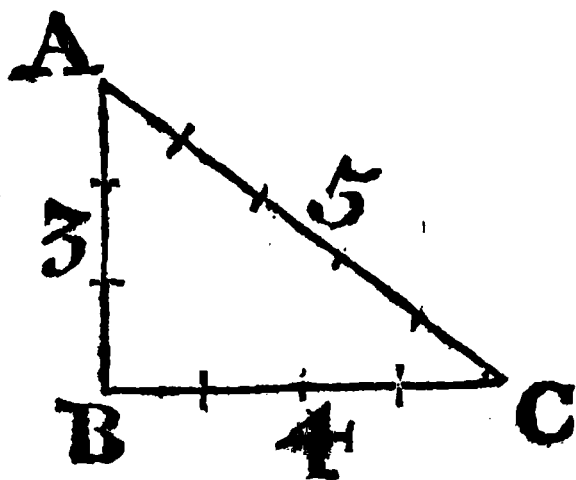
Atqui $\square AE \propto \square K$. Per constructionem.
Et $\square EF \propto \square L$.

Ergo $\square K$ superat $\square L$ per $\square AF$.
adeoque $\square AF$ est differentia \square torum, K & L .

P R O B L E M A. III.

Cognitis trianguli rectanguli ABC duobus lateribus, invenire tertium.

P R A X I S.

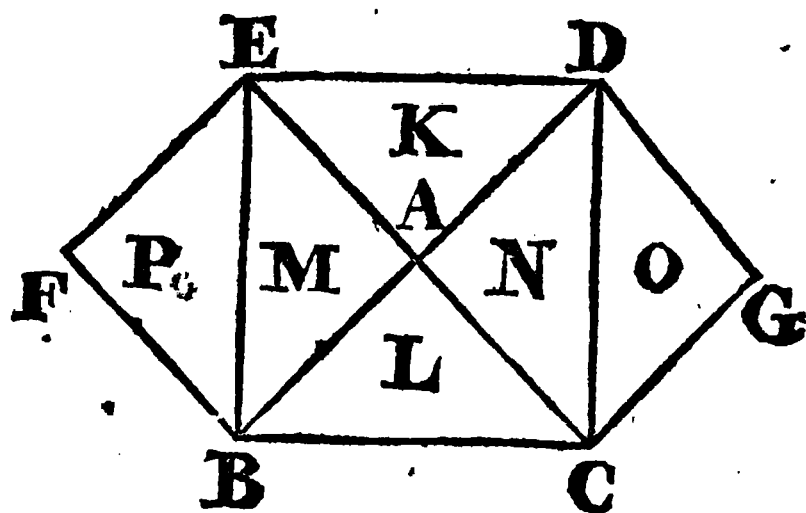


Sint cognita duo latera AB 3. BC 4. Quia triangulum est rectangulum : duo quadrata AB & BC : seu 9 & 16 addantur in unam summam :
&

& obtinebitur 25: pro duobus \square tis AB . BC . hoc est pro \square to AC : cujus radix 5 dabit latus quæsitum AC .

Similiter cognita sint latera AC . 5 & BC 4: tūc a \square to AC 25 sublato \square to BC , 16, restabit pro \square to AB 9. cujus radix exhibebit latus quæsitum AB .

SCHOLIUM II.



Si triangulum rectangulum sit
simul Isosceles, facillime propo-
sitionis veritas demonstrabitur
hunc in modum.

PRÆPARATIO.

1. Super lateribus AB. AC. fiant \square ta
AF. AG.

2. Ducantur rectæ CD. DE. EB.

Dico BCDE esse \square tum a BC, &
 ∞ \square tis AF. AG.

DEMONSTRATIO.

PARS I.

Per 32. I. illiusque Coroll. 2. tres angu-
li

li ad B sc. ABC. ABE. EBF. ut & tres
ad C scil. ACB. ACD. DCG : præterea
duo ad E sc: AEB. FEB, ut & ad D
duo ADC. GDC; sunt semirecti: un-
de jam facile deducitur angulos AED.
ADE etiam esse semirectos : adeoque
quatuor angulos quadrilateri BCDE esse
rectos: quare latera opposita sunt paralle-
la: sc. BC. ED & EB, DC.

Atqui $BC \propto CD$ (6. I.) quia triang.
BCD est rectangulum in C & habet duos
angulos supra Basin BD æquales: unde
etiam $BE \propto ED$.

Ergo quatuor latera BC. CD. DE.
EB sunt æqualia: adeoque BCDE □tum
lateris BC.

PARS II.

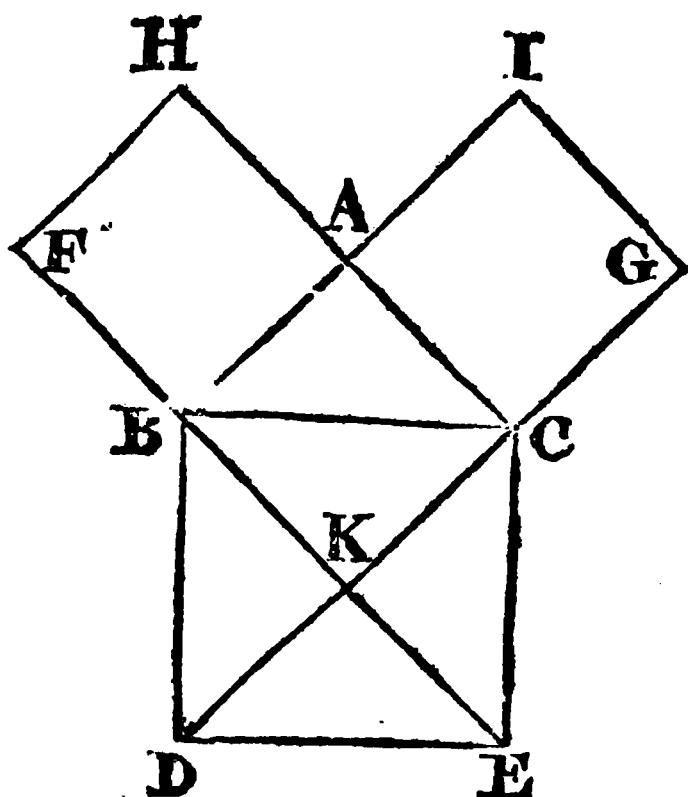
Sex triangula K. L. M. N. O. P. ha-
bent suas bases inter se æquales, (quia
sunt latera □ti) & duos angulos supra ba-
sin, quia omnes sunt semirecti.

Ergo per 26. I. triangula omnia inter
se sunt æqualia.

Adeoque 4 triangula K. M. L. N \propto lia
4 triangulis. P. M. N. O.

Hoc est □tum. BCDE \propto □tis AF.
AG. Q. E. D.

Cui demonstrationi aliam sic breviter adjungimus.



Descriptis quadratis AF . AG . BE , producantur latera FB . GC .. quæ necessario debere cadere in E & D facile probari potest, ut BE CD sint Diametri, quæ ipsum quadratum & singulos illius angulos bifariam secant.

Unde jam nullo negotio deducitur lineas BK . CK . DK . EK esse inter se & lateribus AB . AC . æqua-

æquales, adeoque trianguli DBC cum \square to CI inter easdem parallelas IB GD existentis, basis DC , dupla est Parallelogrammi baseos CG : ergo per Scholium pro. 41. I. Triang. $DBC \propto \square$ to AG .

Deinde triangulum $DEC \propto$ triang. DBC . 34. I.

Et Triang. $DEC \propto \square$ to AG .

Et \square tum $AG \propto \square$ to AF .

Ergo Triang. $DEC \propto \square$ to AF .

Quare sequitur duo Triangula DBC . DEC simul sumta, hoc est \square tum $BCDE$ esse æque quadratis duobus AF . AG simul sumtis.

Cæterum ex hac eadem demonstrationis forma, sequens haud inelegans deducimus

Theorema. I.

In Triangulo Isoscele rectangulo ABC , quadratum Hypotenuse BC quadruplum est trianguli ejusdem propositi ABC .

De-

DEMONSTRATIO.

Ex superiori demonstratione patet singulos \square ti BE angulos bisectos esse, & lineas BK . CK . DK EK lateribus AB . AC . æquales: Unde jam sequitur quatuor triangula BKC . CKE . EKD . DKB . & inter se & triangulo BAC esse æquiangula, & æquilatera: adeoque æqualia.

Cum autem quatuor ista triangula constituent \square tum $BCDE$, patet illud \square tum quadruplum esse Trianguli ABC . Q. E. D.

Quæ demonstratio præcedentis Theorematis, cum mihi occasionem præberet inquirendi, quomodo \square tum hypotenusæ trianguli rectanguli inæqualium laterum se haberet ad ipsum Triangulum, sequens sese statim prodebat.

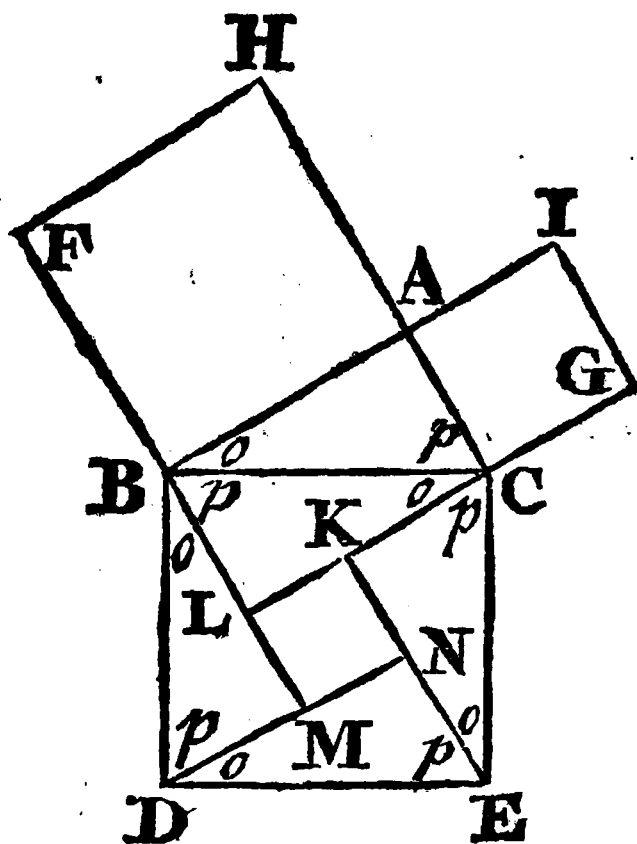
Theorema II.

In quolibet cunque Triangulo
Re-

Rectangulo inæqualium laterum,
quadratum Hypotenusæ triangu-
lum propositum quater sumtum
superat \square to quod fit a differentia
reliquorum laterum : seu quod
idem est ; \square tum Hypotenu-
sæ est æole triangulo proposito
quater sumpto una cum \square to diffe-
rentiæ reliquorum laterum.

Demonstrationem vide pagina
sequente.

DEMONSTRATIO.



Super trianguli rectanguli ABC lateribus construantur \square ta AF . AG . BE .

Deinde producantur latera FB GC : tum ex angulis E & D ducantur EK parallela FB , & DN parallela GC : istæ lineæ ita se interfecabunt, ut constituent quatuor triangula BLC . CKE . END DMB ,

$\triangle DMB$, & in illorum medio quadratum $KLMN$.

Quibus constructis vel leviter in præcedentibus exercitatus facile omnes angulos O , ut & omnes P inter se æles esse perspiciet.

Unde sequitur per 26. I. quinque ista Triangula esse inter se æqualia; & habere latera æqualia lateribus: sc. BM . DN . EK . CL : ut etiam AC . CK . EN . DM . BL .

Quare si auferatur BL a BM : DM a DN : EN ab EK : & CK a CL , remanebunt KL . LM . MN . NK inter se æles, quæ sunt differentię laterum AB . AC .

Quia autem istæ æquales lineæ ad angulos rectos sunt junctæ, ut facile ex 26. I. patet, sequitur quadrilaterum $KLMN$ esse quadratum differentię laterum AB . AC .

Cum ergo quatuor triangula BMD . DNE . EKC . CLB . cum

□to $KLMN$ constituent totum $BCDE$; quod fit ab hypotenusa BC : patebit abunde propositi nostri Theorematis veritas.

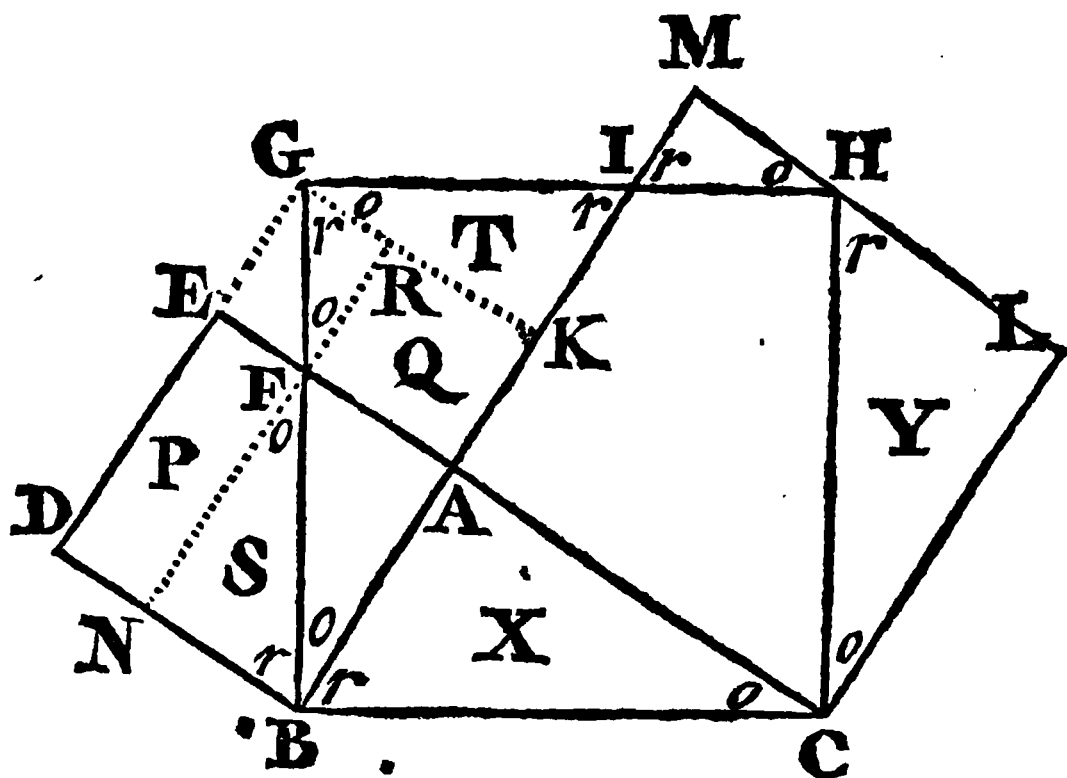
Vix autem possum quin hic afferam plusquam elegantem Clarissimi Christophori Sturmii demonstrationem præsentis prop. 47, quam ex hac figura, alio ac diverso a nobis ex fundamento, constructâ, nobis suppeditat, in calculo Algebraico propositum: quæ tamen ab iis, qui vel a limine Analysin speciosam salutaverunt, intelligi potest.

Illa autem ita se habet. Trianguli Rectanguli ABC , latus BC seu hypotenusa dicatur a : AC vocetur b . AB c . Area Trianguli ABC erit $\frac{1}{2} bc$. adeoque quatuor triangula facient $2 bc$: Deinde differentia laterum AB . AC erit $c - b$, ejusque □tum $cc - 2bc + bb$: quod priori artæ quatuor triangulorum additum facit $cc + bb$,
quæ

quæ summa est æolis □to *aa* facto
ab hypotenuſa.

Cum autem iſta ſumma exhi-
beat duo □ta laterum *AB. AC.*
ſequitur etiam duo illa □ta eſſe
æolia □to *BC.*

Q. E. D.



Cæterum illustris hujus propositionis aliam a præcedente generalem demonstrationem hoc modo damus.

- Triangulum rectangulum datum sit ABC ; laterum AB . AC . quadrata sint AD . AL : & lateris BC quadratum BH : Jam patet ad oculum quadratum BH a reliquis quadratis AD , AL , abscindere triangulum AFB & trapezium $AIHC$. Si jam, producta DE

DE in G, & ducta NR per F
parallela BM & GK parallela
EA, demonstratur esse triangu-
lum

$$X \propto Y.$$

$$S \propto T.$$

$$\text{Parallelogr. } P \propto Q.$$

$$\text{Triangulum } GFR \propto IHM.$$

Certi esse poterimus de pro-
positionis veritate.

DEMONSTRATIO.

Generaliter notandum facile
posse ex præcedentibus demon-
strari omnes angulos O ut &
omnes R esse inter se æquales.

Primum $X \propto Y$.

Duo triangula X & Y habent
duos angulos O & R ut & latera
BC. CH æqualia: Ergo (26. I.)
ipsa triangula sunt æqualia.

Secundum $S \propto T$.

Duo triangula S & T , habent duos angulos O & R , & ut & latera NF . GK æqualia : Ergo (26. I.) ipsa triangula sunt æqualia. Et latus $BF \propto GI$. quibus ab æqualibus BG , GH ablatis, remanet $FG \propto IH$.

Tertium $P \propto Q$.

Quia sunt complementa parallelogrammi DK . (43. I.)

Quartum Triang. $GFR \propto IHM$.

Duo triangula GFR & IHM , habent duos angulos O & R . ut & latera FG . IH æqualia. Ergo (26. I.) ipsa triangula sunt inter se æqualia.

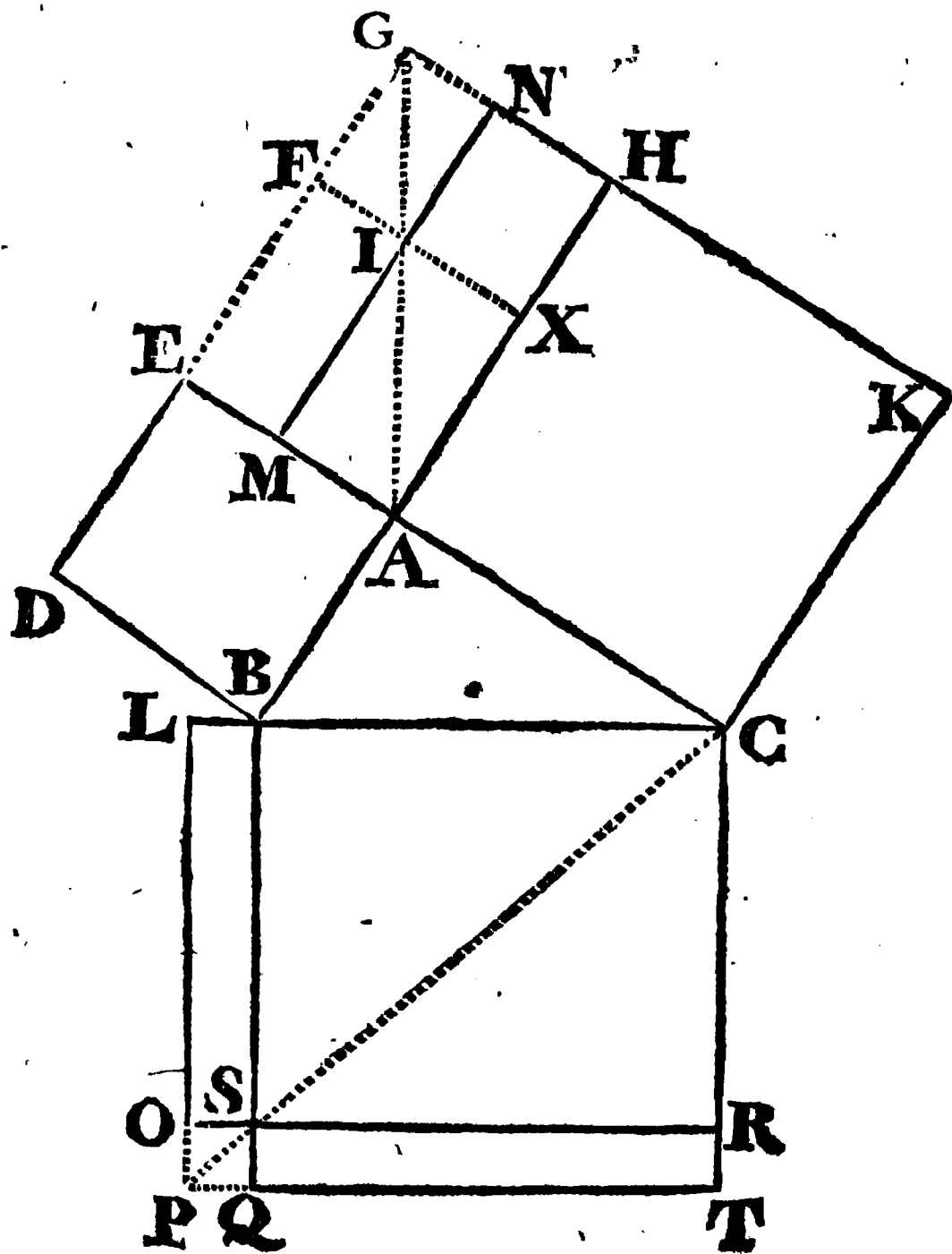
Ex quibus patet lateris BC quadratum BH in se comprehendere duorum reliquorum laterum AB . AC quadrata AD . AI . Ergo quadratum BH etiam
per

per Axioma 13. duobus quadratis AD. AI. æquale est.

Q. D. E.

Quod autem BG concurrat cum DE in puncto G, & CH cum ML in H, supra demonstratum est.

Alia DEMONSTRATIO.



Trianguli rectanguli ABC, laterum quadrata sunt AD. AK. BT. demonstrandum est hoc tertium BT esse \propto le duobus reliquis.

Fiat AX \propto AE, erit super AX factum quadratum AF \propto AD. Producat^{ur} KH in G ut sit HG \propto XF. Ducatur AG. & per I ducatur MIN parallela AH & tandem agatur EG. Eritque HE parallelogrammum, cujus complementa EI. IH. sunt \propto equalia: si utrimque addatur commune parallelogrammum MX. erit quadratum AF hoc est AD \propto parallelog. MH:

Ergo totum parallelogr. MK esse \propto quale duobus quadratis AD. AK.

Deinde sumatur CL \propto CM, & CR \propto CK. & perfecto parallel. LR (quod erit \propto ipsi MK) producantur LO & TQ ut sibi occurrant in P, tum ducatur Diagonalis CS, quæ productâ cadet in P. (ut mox demonstrabitur.) Hisce factis in parallelogr. LT duo complementa LS. ST erunt (43. I.) inter se \propto equalia: quibus si addatur commune parallelogr. BR, erit parallelogr. LR (hoc est duo Quadrata AD. AK) \propto quadrato BT.

Ultima Demonstratio.

Intra lateris BC quadratum BR, fit \square CH \propto lateris AC \square to Y: Quo a \square to BR sublato remanebunt duo parallelogramma BO, OK. seu factio parallelogr. OS \propto OK, remanebit totum parallelogrammum BT, Quod si demonstratur esse \propto \square to X, peracta res erit.

Quare sumta BE \propto BA, construatur \square tum BG \propto \square to X. Tum productis lateribus EG. ST, ut concurrant in N; ex B per L ducatur BLN; quæ etiam cadet in idem punctum N.

Tum in parallelogrammo BN complementa EL, LS erunt æqualia & si ab utraque parte addas commune BL. erit parallelogr. BT (hoc est BO + OK) \propto \square to BG seu X.

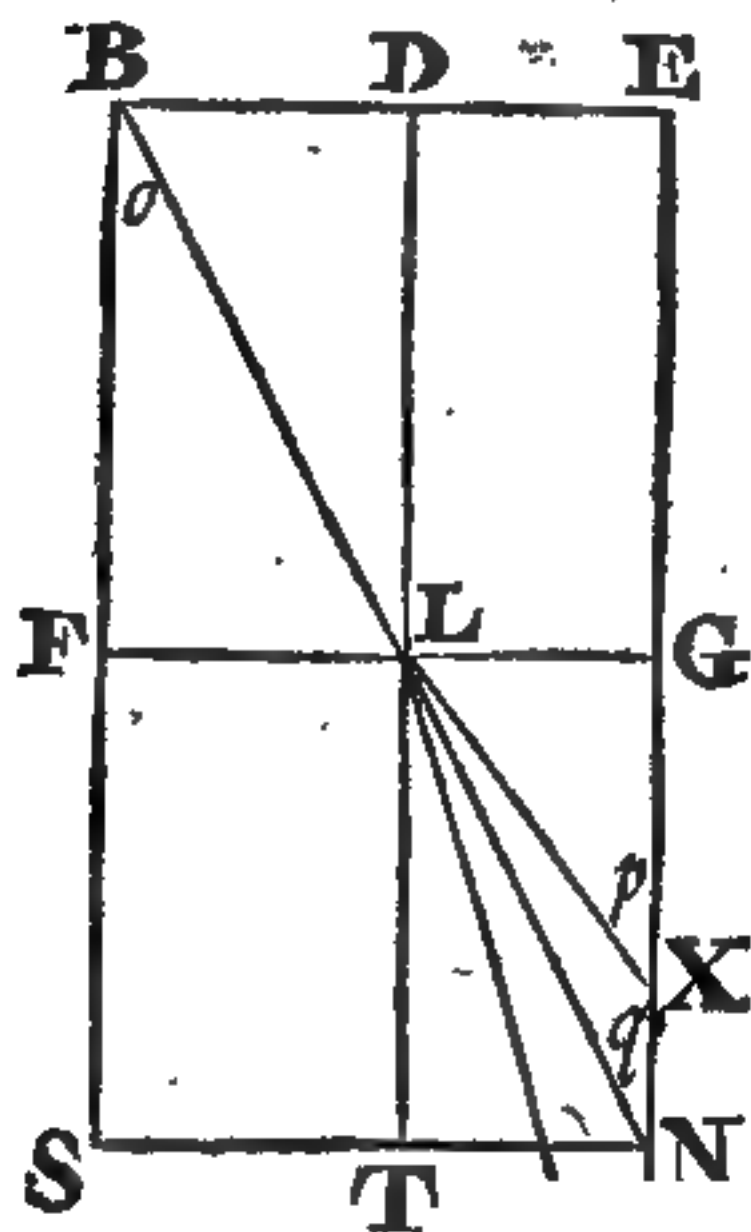
Unde jam patet duo \square ta X & Y esse æqualia \square to BR.

Q. D. E.

X 3

Quod

Quod autem Diameter BL producta
 cadat in punctum N, ubi latera EG,
 ST producta concurrunt, sic probatur.



Si

LIBER PRIMUS. 167

Sit non cadat in N, tum juxta adversarium cadat.

Vel supra N in X, ut BX fit linea recta.

Vel infra N in Y, ut BY fit recta.

In X supra N.

Angulus O ∞ Q. } 9. I.
 Angulus O ∞ P. }

Ergo P ∞ Q externus interno contra 16. I.

Quæ demonstratio obtinet in omnibus punctis supra N sitis.

In Y infra N.

Angulus O ∞ Q. } 22. I.
 Angulus O ∞ T. }

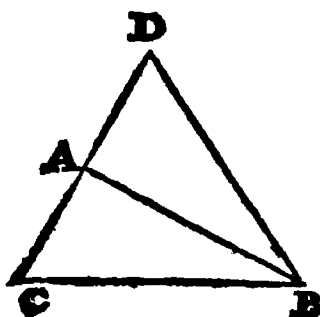
Ergo Q ∞ T. iterum externus interno contra 16. I.

Eademque demonstratio locum habet in omnibus punctis infra N positis.

Ergo cum linea BL producta non possit cadere supra nec etiam infra N necessario cadet in ipsum punctum N.

PRO-

PROPOSITIO XLVIII.

Theor.
34.

*Si quadratum ab uno
Trianguli latere CB descri-
ptum sit aequale duobus reli-
quorum laterum CA. AB
quadratis : angulus CAB,
quem reliqua ista latera con-
tinent, rectus erit.*

DEMONSTRATIO.

a II. I. Ex A ipsi AB (a) excitetur perpendicularis AD
 \propto AC. & ducatur recta DB.

Tum in Triangulo DAB erit.

b 47. I. Quadr. DA (hoc est AC) \perp quadr. AB (b) \propto
quadr. DB.

Atqui quadr. AC \perp quadr. AB etiam est
 \propto quadr. CB. per Prop.

c Ax. I. Ergo (c) quadr. DB \propto quadr. CB.

Adeoque latus DB \propto lateri CB.

Quare in Triangulis ADB, ACB.

Latus AD \propto AC per constructionem.

Latus DB \propto CB.

Latus AB commune.

d 8. I. Ergo (d) etiam omnes anguli sunt; æquales
adeoque

Ang. DAB \propto CAB.

Atqui DAB est rectus.

Ergo CAB etiam rectus erit.

Q. D. E.

FINIS LIBRI PRIMI.

Eu-

E U C L I D I S

E L E M E N T O R U M

L I B E R S E C U N D U S.

IN primo libro instituta triangulorum tum quoad angulos tum quoad latera varia comparatione, & parallelogrammum non una & inter se & cum triangulis collatione, in hoc libro secundo aggreditur Euclides linearum ad libinum sectarum parallelogramma Rectangula & Quadrata; docendo quomodo se habeant Parallelogramma rectangula quæ sunt a partibus alicujus lineæ tum inter se tum relata ad Quadrata totius lineæ: sicut ex ipsis propositionibus porro manifestum evadet.

Cum autem hujus libri propositiones; licet numero non adeo multæ, tales sint, ut sua difficultate tyronum progressui haud exiguum sæpe injiciant moram, nos

Y

olcum

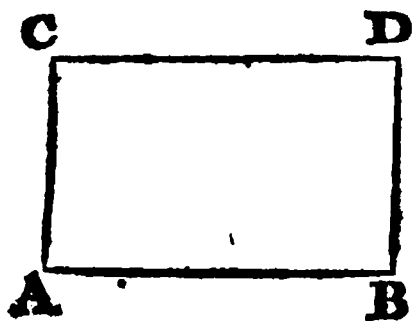
oleum & operam non perdidisse existimabimus, si illarum demonstrationes ita ordinemus, ut quilibet illas attento perlegens studio, illisque primum librum bene perceptum rite applicans, maximam difficultatem penitus disparere comperiat.

Cæterum ne occurrentes ignotæ voces demonstrationum abruptant cursum, hic ut & in primo libro factum est, Definitiones præmittuntur terminorum adhibendorum tollentes dubiam significationem.

DEFINITIONES.

I.

Parallelogrammum rectangulum ABCD contineri dicitur sub duabus rectis CA. AB, rectum angulum A comprehendentibus.

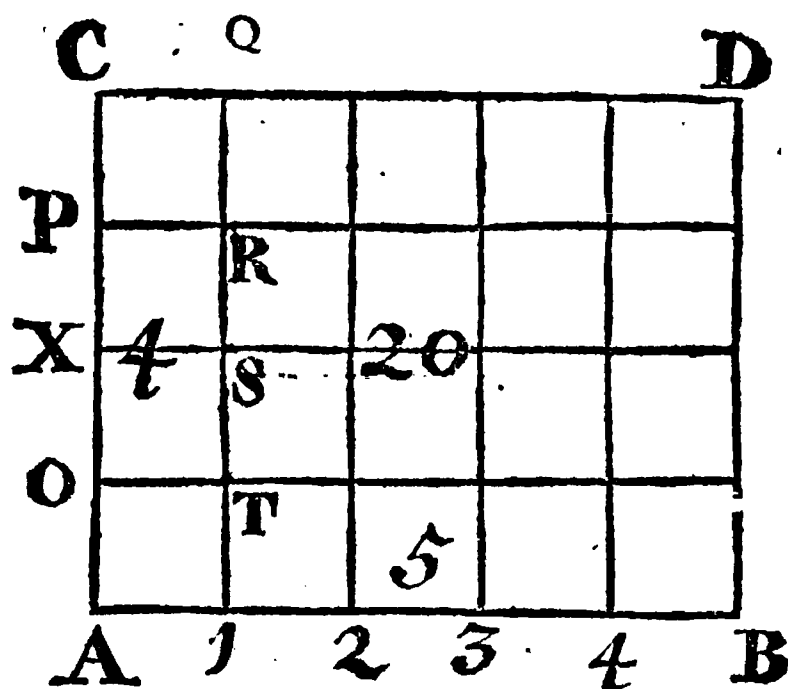


Antea vidimus generationem alicujus superficiei. quæ in memoriam revocata parallelogrammi rectanguli formationem intellectu reddet faciliorem.

Rectæ lineæ AB perpendiculariter insistat linea CA, quæ concipiatur ferri supra lineam AB, ut ipsi semper maneat perpendicularis; cum ista linea CA pervenerit ad punctum B: tum extremum punctum C descriptam relinquet lineam CD æqualem ipsi AB; & cum linea BD sit quasi eadem cum linea AC ex puncto

A delata in punctum B, erit linea BD etiam æqualis ipsi AB.

Unde patet ad inveniendam totam quantitatem seu aream alicujus parallelogrammi requiri tantum notam longitudinem duorum laterum angulum rectum continentium.



Quod ut adhuc clarius evadat, sicut & arctissimam inter linearum in se invicem ductum & numerorum multiplicationem esse æffinitatem, ponamus lineam CA divisam esse in quatuor partes, æquales CP. PX. XO. OA. similiter lineam AB

AB in quinque partes, quæ prioribus æquales sint. Si jam linea CA super AB mota pervenerit ad locum 1 Q punctum C. descriptum exhibebit lineam CQ. punctum P, lineam PR : X, lineam XS. O, lineam OT ; adeoque unico isto motu facta erunt quatuor ista minora quadrata CR. PS. XT. OI, quot nim. linea CA partes habet : si enim ex pluribus constaret partibus, etiam plura constituta essent quadrata.

Facile autem intelligimus illud idem esse ac si numerus 4 ducatur seu multiplicetur per 1 seu unitatem.

Similiter si linea QI (quæ eadem jam concipienda est cum AC) secundo motu pervenerit ad punctum 2, eodem modo quatuor alia quadrata efficientur quæ prioribus addita simul 8 dabunt : id quod iterum idem est, ac si numerus 4 bis multiplicetur per 1 seu semel per 2.

Non aliter si linea AC perget moveri ; tertius motus quatuor alia prioribus adjiciet quadrata ; quatuor alia quartus ; donec tandem quintus ultima quatuor adjungendo quadrata totum parallelogrammum rectangulum perficiat & compleat : quæ omnia quadrata sibi invicem addita,

20 exhibebunt; quod rursus idem est ac si numerus 4 quinquies per unitatem seu semel per 5 multiplicatus essent; quæ operatio similiter eundem producit numerum 20.

Cæterum notandum est in sequentibus ad multiplicandum lineam AB per lineam CD, seu adducendam lineam AB in lineam CD: vel tandem ad designandum rectangulum comprehensum sub lateribus AB, CD in semper scripturum \square AB. CD.

Unde jam existimo manifestam satis esse rationem ob quam ad inveniendam alicujus seu omnium parallelogrammorum rectangulorum aream solummodo duorum laterum rectum angulum comprehendentium requiratur notitia.

Hinc porro apparet, quomodo cognita area parallelogrammi rectanguli, & alterutro laterum alterum inveniri possit latus; dividendo scilicet datam aream per latus cognitum: id quod in parallelogrammo ABCD clare patet, quod 20 quadrata continet; qui numerus si dividatur per 4 seu cognitum latus CA. acquiremus 5 pro latere AB. & vicissim si 20 dividatur per 5 seu latus notum AB, invenietur 4 pro altero latere AC.

No-

N O T A.

Primo. Parallelogrammum dicitur rectangulum quod habet unum angulum rectum. Nam si unus est rectus, ^a erunt ^a 29 & 34. I. & reliqui recti.

• Secundo. Parallelogrammum est vel oblongum vel quadratum.

Oblongum est quod latera contigua habet inæqualia, sive quod continetur sub duabus rectis inæqualibus; illud autem nos in sequentibus semper exprimemus hoc signo \square ; adeoque ex: gr: \square AC, semper significabit parallelogrammum rectangulum AC.

Quadratum est, quod sub duabus rectis æqualibus continetur: illud etiam exprimemus tali signo \square ut \square CD, semper denotet Quadratum CD.

Tertio. In sequentibus nomine rectanguli Euclides semper intelligit parallelogrammum rectangulum.

Quarto. Geometrae omne parallelogrammum exprimunt, duas tantum nominando literas per diametram oppositas: ut ad designandum parallelogrammum appositum adhibent literas AD, vel BC.

II. Omnis

II.

Omnis parallelogrammi spatii unum quodlibet eorum quæ circa diametrum illius sunt, parallelogrammorum, cum duobus complementis, Gnomon vocatur.

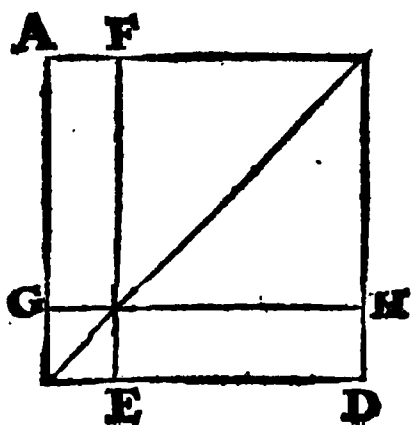
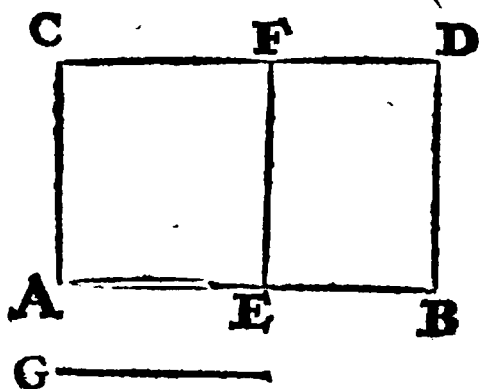


Figura FGEH, composita ex duobus complementis FG. EH &, quod circa diametrum est parallelogrammo GE, dicitur Gnomon seu norma; ad imitationem illius instrumenti quo fabri utuntur, ad examinandum, utrum ex: gr: duo parietes, vel duo asseres ad angulum rectum conjuncti sint nec ne.

PROPOSITIO. I.



Si fuerint duæ re- Theor. I.

ctæ G & AB, quarum altera secta sit in quocunque partes AE. EB altera vero in secta; erit re-

ctangulum sub illis duabus G & AB comprehensum æquale re-

ctangulis, quæ sub in secta G, & sub singulis segmentis AE. EB continentur.

DEMONSTRATIO.

Ex punctis A & B erige duas perpendiculares AC, BD æquales datæ G: & juncta CD, ex E duc rectam EF parallelam AC vel BD. Tum lineæ CA, FE inter (a) se æquales erunt 30 les datæ G. a 34. I.

Jam \square AF continetur sub CA, hoc est G & segmento AE.

Et \square ED continetur sub FE hoc G est & segmento ED.

Duo autem \square la AF, ED simul sunt (b) 30 lia b Ax 16. toti \square lo AD quod continetur sub data & tota AB.

Ergo patet veritas propositionis.

Sub calculi formula breviter sic demonstratur

$$\begin{array}{r} AB \quad 30 \quad AE \quad + \quad EB \\ G \quad \quad G \quad \quad G \end{array} \Bigg) M$$

$$(c) \quad \square G, AB \quad 30 \quad \square G, AE \quad + \quad \square G, EB. \quad c Ax. 6.$$

Q. D. E.

Sit AB. 10,

AE. 7.

EB. 3.

G. 4:

Vel in Numeris.

$$\begin{array}{r} 10 \quad 30 \quad 7 \quad + \quad 3 \\ 4 \quad \quad 4 \quad \quad 4 \end{array} \Bigg) M$$

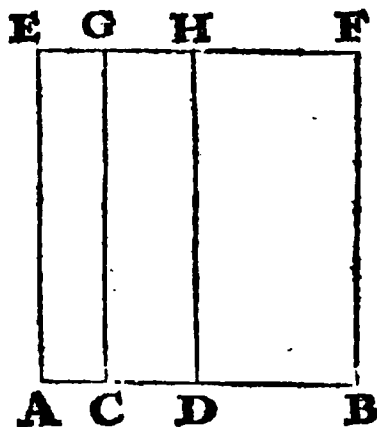
$$40 \quad 30 \quad 28 \\ Z$$

$$12. \quad 30 \quad 40. \\ Pro-$$

PROPOSITIO. II.

Theor. 2.

Si recta AB secta sit utcumque in C & D triarectangula sub tota AB, & singulis segmentis AC. CD. DB comprehensa equalia sunt quadrato quod fit a tota AB.



DEMONSTRATIO.

Super AB fiat quadratum BE, ducantur CG. DH parallelæ AE: quæ sunt æquales a AE. hoc est AB.

□ EC fit ab EA hoc est AB & parte AC.

□ GD fit ab GC hoc est AB & parte CD. HB

□ HB fit ex HD hoc est AB
& parte DB.

Cum autem tria □la EC. GD.
HB simul sumta constituent □tum
EB, patet illa etiam ipsi esse æ-
qualia. ^b

b Ax. 13.

Sub calculo.

$$\begin{array}{r} \text{AB} \propto \text{AC} + \text{CD} + \text{DB.} \\ \text{AB} \quad \text{AB} \quad \text{AB} \quad \text{AB.} \end{array} \Bigg) M$$

$$\begin{array}{r} \square \text{AB} \propto \square \text{AB. AC} + \square \text{AB.} \\ \text{CD.} + \square \text{AB. DB.} \end{array}$$

Vel in numeris.

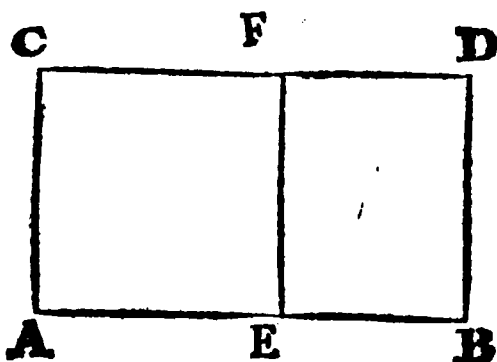
Sit AB 10. AC 2. CD 3. Ergo DB 5.

$$\begin{array}{r} 10 \propto 2 + 3 + 5 \\ 10 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \end{array} \Bigg) M$$

$$100 \propto 20 + 30 + 50 \propto 100.$$

PROPOSITIO III.

Theor. 3. *Sit recta AB secta utcumque in E, rectangulum sub tota AB & partium alterutra AE comprehensum, æquale est ejusdem partis AE quadrato, una cum rectangulo sub partibus AE. EB comprehenso.*



DEMONSTRATIO.

Ex A & B erige perpendiculares AC. BD æquales segmento AE: tum juncta CD ducatur EF parallela AC, quæ ipsi AC etiam ærit æqualis

CE

A \square CE continetur sub CA hoc
est AE & segmento AE, a-
deoque CE est quadratum
factum ab AE.
 \square FB continetur sub FE hoc
AE & segmento EB.

\square CE cum seu \perp \square FB est æ-
quale \square CB, comprehenso sub
CA hoc est segmento AE & tota
linea AB. Q. E. D.

Sub calculo.

$$\begin{array}{r} AB \propto AE + EB \\ AE \quad AE \quad AE \end{array} M$$

$$\square AE. AB. \propto \square AE + \square AE. EB.$$

Vel in numeris.

Sit AB. 10. AE. 6. Ergo EB. 4.

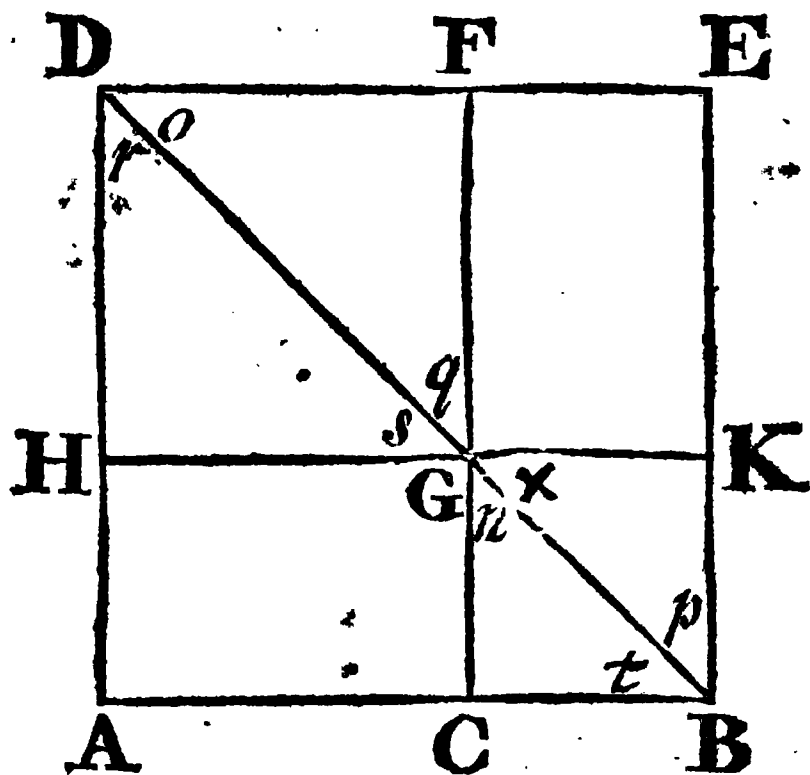
$$\begin{array}{r} 10 \propto 6 + 4 \\ 6 \quad 6 \quad 6 \end{array} M$$

$$60 \propto 36 + 24 \propto 60.$$

PROPOSITIO. IV.

Theor. 4.

Si recta linea AB utcumque secta sit in C. Quadratum totius AB erit æquale quadratis segmentorum AC CB, una cum bis sumto rectangulo sub segmentis AC. CB comprehenso.



DEMONSTRATIO.

46. I.

Super AB fiat^a \square BD, & ducta diametro BD sumatur BK \propto BC.
tum

tum ducantur \hookrightarrow CF. KH paralle- ^{b 31. I.}
læ lateribus BE. BA.

Jam in triangulo DEB.

Angulus $O \propto P$. quia uterque
semirectus. ^c

Atqui ang. $Q \propto P$. ^d

^c 2 Cor.
32. I.
^d 29. I.

Ergo $O \propto Q$. adeoque $DF \propto FG$ ^{e 6. I.}

Eodem modo probatur quod sit

Ang. $R \propto S$. ac proinde latus
 $DH \propto GH$.

Atqui in parallelogrammo GD,
latera opposita DF. HG ut & LH,
FG sunt æqualia ^f

^f 34. I.

Ergo omnia illius latera sunt
inter se æqualia.

Atqui illorum unum HG \propto
AC. ^g

^g 34. I.

Ergo omnia sunt æqualia se-
gmento AC. Adeoque cum o-
mnes anguli sint recti, parallelo-
grammum DFGH est quadratum
factum ab uno segmento AC.

Eodem modo facile demon-
stra-

stratur parallelogrammum CK
esse quadratum alterius segmenti
CB.

Deinde \square FK continetur sub FG
hoc est AC & sub GK hoc est CB.

Denique \square AG continetur sub
uno segmento AC & sub CG hoc
est CB.

Quæ duo \square la si ad duo reli-
quo \square ta addantur exhibebunt to-
tum \square quod fit ab AB; adeoque
ipsi æqualia erunt. Q. E. D.

Per calculum hoc modo de-
monstratur.

$$\begin{array}{l} AB \propto AC \perp CB \\ AB \propto AC \perp CB \end{array} M.$$

$$\begin{array}{l} \square AC \perp \square AC. CB. \\ \perp \square AC. CB \perp \square CB. \end{array}$$

$$\square AB \propto \square AC \perp 2 \square AC. CB \perp \square CB.$$

Seu in numeris.

$$AB \propto 10.$$

$$AB \ 10$$

$$AC \propto 6.$$

$$AB \ 10$$

$$\text{Ergo } CB \propto 4.$$

$$\begin{array}{r} 100 \\ \hline 10 \end{array}$$

$$4 \ CB$$

LIBER SECUNDUS. 185

AC 6	4	CB		6 AC
AC 6	4	CB		4 CB
36				24
16				2
				48
				36
				16
				100

COROLLARIUM I.

Parallelogramma circa diametrum quadrati sunt quadrata.

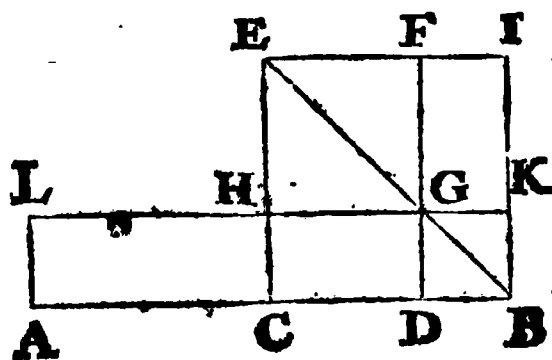
COROLLARIUM II.

Si recta linea bifariam secetur quadratum totius lineæ quadruplum est quadrati a dimidia facti.

PROPOSITIO V.

Theor. 5.

Si recta linea AB secetur in æquali in C, & non æqualia in D: rectangulum AG sub inæqualibus segmentis AD. DB comprehensum, una cum quadrato HF ab intermedia sectione CD, æquale est quadrato CI, quod a dimidia CB describitur.



PRÆPARATIO.

1. Super dimidia CB fiat ^a quadratum CI, ducaturque diameter.
2. Ex D ducatur DF lateri BI ^b parallela:
3. Sumta BK \propto BD, ducatur KL ^b parallela AB, ut & AL parallela BK.

De-

LIBER SECUNDUS. 187

DEMONSTRATIO.

A $\left\{ \begin{array}{l} \square CG \propto^c \square GI. \text{ quia sunt com-}^c 43. I. \\ \text{plementa.} \\ \square DK \quad \square DK. \end{array} \right.$

$\square CK \propto DI.$

Atqui $\square CK \propto^d \square AH.$ quia sunt d 36. I.
in iisdem parallelis & æqualibus basibus.

Ergo $\square AH \propto \square DI.$
 $\square CG \quad \square CG.$ A.

A $\left\{ \begin{array}{l} \square AG \propto \text{Gnomoni } GHBFG. \\ \square HF \square HF, \text{ quod fit } \bar{a} CD. \\ 4. II. \end{array} \right.$

$\square AG \perp \square HF. \propto \square CI.$ a dimidia
CB. facto.

In numeris.

Sit tota AB 10. Ergo dimidia AC, CB 5.
AD 8. Ergo DB 2. . Et CD. 3.

$\begin{array}{r} CB \ 5 \\ CB \ 5 \end{array} \Bigg| M.$
 $\square CB \ 25$

$\begin{array}{r} AD \ 8 \\ M \ } DB \ 2 \end{array}$
 $\square AD. DB. \ 16.$

Tum.

$\begin{array}{r} CD \ 3 \\ CD \ 3 \end{array} \Bigg| M.$

$\square CD \ 9.$
 $\square AD. DB \ 16.$ A

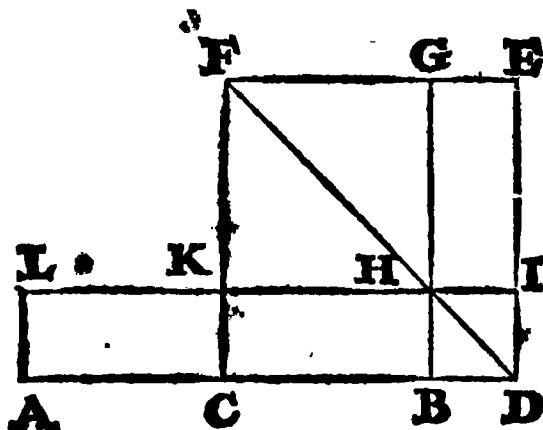
$\square ADB. \perp \square CD \ 25.$ ut ante.

Aa 2

Pro.

PROPOSITIO VI.

Theor. 6. *Si recta AB sit bifariam secta in C, eique recta quaedam BD adjiciatur; Erit rectangulum sub tota composita AD & adjecta BD contentum una cum quadrato dimidiæ CB, æquale quadrato ipsius CD compositæ ex dimidia & adjecta.*



PRÆPARATIO.

1. Super CB fiat $\square CE$.
2. Ducta Diametro FD , ex B agatur BG parallela DE .
3. Sumpta $DI \propto DB$, ducatur IL parallela DA , ut & AL parallela DI .

De-

DEMONSTRATIO.

$\square AK \propto^a \square CH$. quia in iisdem parallelis.

Atqui $\square HE \propto^b \square CH$, quia sunt complementa.

Ergo $\square AK \propto^c \square HE$.
 $\square CI \quad \square CI.$ } A. c Ax. 1.

A { $\square AI \propto^d$ Gnomoni GHKDG.
 $\square KG \quad \square KG$ factum a dimidia CB. d Ax. 2.

$\square AI + \square KG \propto \square CE$ quod fit a CD

In numeris.

Sit linea AB 10. BD 2. Ergo tota AD, 12. Dimidia AB. seu AC, seu CB 5. Ergo CD 7.

AD 12. } M.
 BC 2.

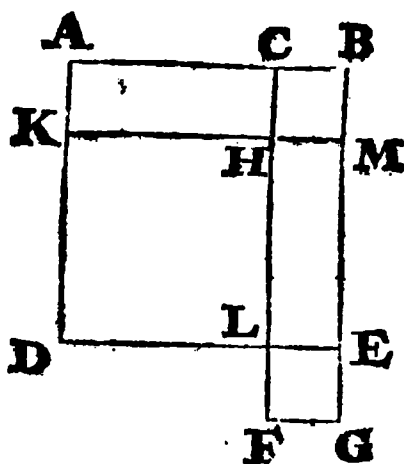
$\square AD. DB$ 24 / A.
 $\square CB.$ 25 /

$\square AD. DB + \square CB$ 45 \propto 45 $\square CD.$

PROPOSITIO VII.

Theor. 7.

Si recta AB utcumque secetur in C, erunt quadrata totius AB & utriusvis segmenti CB, equalia bis sumto rectangulo contento sub tota AB & segmento dicto CB, una cum quadrato alterius segmenti AC.



PRÆPARATIO.

a 46. I.

1. Super ^a AB fiat \square AE.2. Sume BM \propto BC, & ducantur CL

b 31. I.

MK ^b parallelæ lateribus BE. BA. Erit-

c 34. I.

quod LE \propto ^c CB.3. Super LE fiat \square EG.

De-

DEMONSTRATIO.

Duo \square ta AE. EF \propto duobus \square lis d Ax. 13.
AM. MF cum \square to KL.

Atqui \square AM continetur sub AB &
BM hoc est BC.

Et \square MF continetur sub MG (quæ fa-
cile probatur esse æqualis AB, cum sit ME
 \propto AC & EG \propto CB) & GF hoc est BC

Ut & \square KL sit a KH hoc est AC altero
segmento.

Ergo patet veritas propositionis.

In numeris.

Sit AB 10. \square AB 100 | A.
AC 8. \square CB 4 |

Ergo CB 2, \square AB + \square CB 104.

AB 10 | M.
BC 2 |

\square AB BC 20

$\xrightarrow{2}$
2 \square AB. BC. 40 | A.
 \square AC 64 |

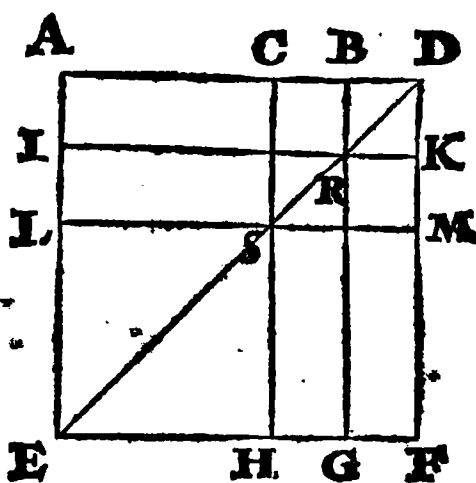
2 \square AB BC + \square AC 104.

ut ante.

PROPOSITIO VIII.

Theor. 8.

*Si recta linea AB secetur ut-
cunque in C; eique adjiciatur
BD \propto BC; Rectangulum qua-
ter comprehensum, sub data AB
& alterutro segmento CB, una
cum quadrato alterius segmenti
AC, erit æquale quadrato AF quod
fit a composita AD.*



PRÆPARATIO.

46. I.

1. Super tota AD a fiat quadratum AF
2. Sumtis DK. KM æqualibus ipsi BC, ducantur KI. ML parallelæ DA; ut & BG. CH parallelæ AE.
3. Ducatur Diameter ED.

De-

DEMONSTRATIO.

Facile patet quatuor \square la IC. IS. GS
GM esse inter se ^a æqualia, & sub æqua- ^{a 36. &}
libus lineis contenta. ^{43. 1.}

Et circa R constituta sunt quatuor \square ta
quorum latera omnia sunt ipsi BC æqua-
lia. ^b Ergo si addantur

^{b 3 Cor.}
^{4. hujus.}

\square la IC | IS | GS | GM. |
 \square ta CR | SR | RD | MR. | A.

Erunt \square la AR. LR. GS + RD:
GK. omnia inter se æqualia, & con-
tenta vel sub lineis AB. BC, vel sub li-
neis quæ illis æquales sunt.

Quibus si addatur \square LH factum ab
LS hoc est altero segmento AC. Tota
ista summa seu quinque istæ figuræ ex-
æquabunt totum quadratum AF factum a
composita AD. Q. D. E.

In numeris.

Sit AB 10. AC 8. Ergo CB 2.

AC 10 |
CB 2 | M.

AD 12 |
AD 12 | M

\square AC. CB 20 |
4 | M

\square AD 144
ut ante.

4 \square AC CB 80 |
 \square AC 64 | A.

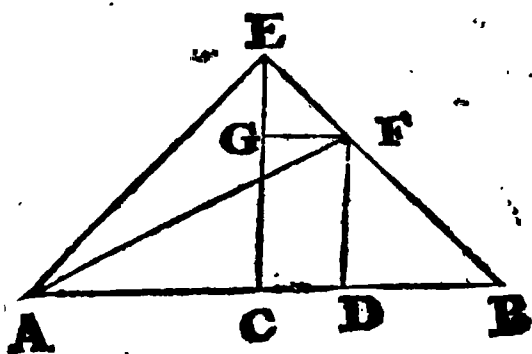
144.

Bb

Pro-

PROPOSITIO IX.

Theor. 9. *Si recta linea AB secetur in æqualia in C, & non æqualia in D; quadrata inæqualium segmentorum AD. DB. dupla sunt quadratorum AC. CD. quæ a dimidia AC & ab intermedia CD fiunt.*



PRÆPARATIO.

1. Ex C erigatur perpendicularis CE \propto AC vel CB, & jungantur AE EB.
2. Ex D ducatur DF parallela CE.
3. Ex F agatur FG parallela AB: ut & denique FA.

De-

DEMONSTRATIO.

Triangulum ACE est rectangulum & Isosceles, ergo anguli A & E sunt semirecti; ut & in ^{a 32. I.} triangulo ECB anguli E & B sunt semirecti; adeoque totus angulus EAB est rectus.

Deinde in triangulo EGF, G (\propto ECB) est rectus: ang. E ^{b 29. I.} semirectus: ergo F etiam semirectus: adeoque EG \propto GF. c

Denique in triangulo FDB ang. ^{c 6. I.} D (\propto ECB) rectus est. Angulus B semirectus: ergo & F semirectus; adeoque latus FD \propto DB.

Hisce prædemonstratis.

I. In Triangulo rectangulo ACE.

d \square AE \propto \square AC \perp \square CE. seu ^{d 47. I.} quia AC \propto CE.

\square AE duplum \square ti AC.

B b 2

2. In

2. In Triangulo rectangulo *EGF*.

$\square EF \propto \square EG + \square GF$. seu quia $EG \propto GF$.

$\square EF$ duplum \square ti GF hoc est CD .

Ergo duo \square ta *AE. EF* sunt dupla \square torum *AC. CD*.

3. Atqui in triangulo rectangulo *AEF*.

$\square AE + \square EF \propto \square AF$.

Ergo $\square AF$ etiam duplum \square torum *AC. CD*.

4. Atqui denique in triangulo rectangulo *ADF*.

$\square AF \propto \square AD + \square DF$ hoc $\square DB$.

Ergo duo \square ta *AD. DB* sunt dupla \square torum *AC. CD*.

Q. E. D.

In numeris.

Sit AB 10. Ergo AC. CB. 5.

AD 7. Ergo DB 3.

Et CD 2.

\square AD 49 $\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} A.$

\square DB 9 $\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$

\square ta AD. DB 58.

\square AC 25 $\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} A.$

\square CD 4 $\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$

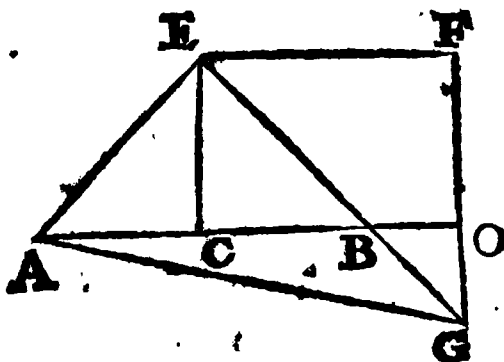
\square ta AC. CD. 29. $\left. \begin{array}{l} \\ 2 \end{array} \right\} M.$

\square ta AC. CD 58.

PROPOSITIO X.

Theor.
10.

Si recta AB secta sit bifariam in C, eique adjiciatur BO; Quadrata totius compositæ AO & adjunctæ BO erunt dupla quadratorum AC CO, quæ a dimidio AC sunt, & a CB composita ex dimidia & adjuncta.



PRÆPARATIO.

1. Ex C erigatur perpendicularis CE \propto CA vel CB, junganturque AE. EB.

2. Ex E ducatur EF \propto CO & parallela AO.

2. Ex F ducatur ---

FG

FG quæ productæ EB occurrat in G.

4. Denique agatur AG.

DEMONSTRATIO.

Triangulum ACE est rectangulum & Isosceles, ergo anguli A & E sunt a semirecti; ut & in triangulo ECB anguli E & B semirecti sunt. a 32. I.

Deinde in triangulo EFG angulus F (\propto opposito C) est rectus: & angulus FEG semirectus, (quia angulus BEC est semirectus;) adeoque alter FGE etiam est semirectus: Ergo latus GF \propto AE \propto CO.

Denique in triangulo rectangulo BOG angulus ad G semirectus est: ergo etiam B semirectus; adeoque latus BO \propto OG.

Hiscæ præmissis.

1. In triangulo rectangulo
ACE,

b 47. L

$\square AE \propto {}^b \square AC + \square CE$. seu
quia $AC \propto CE$.

$\square AE$ est duplum \square ti AC.

2. In Triangulo rectangulo
EFG.

$\square {}^b EG \propto \square EF + \square FG$, seu
quia $EF (\propto CO) \propto FG$.

$\square EG$ duplum \square ti EF hoc CO.

Ergo duo \square ta AE. EG sunt
dupla \square torum AC. CO.

3. Atqui in triangulo rectan-
gulo AEG.

\square ta AE. EG $\propto {}^b \square AG$.

Ergo $\square AG$ est duplum \square torum
AC. CO.

4. Atqui denique in triangulo
rectangulo AOG

$\square AG \propto \square AO + \square OG$.

Ergo duo \square ta AO. OG (hoc est
OB) sunt dupla \square torum AC.
CO.

Q. D. E.

Vel

Vel in numeris.

Sit $AB \propto 10$. Ergo AC . CB . 5.

Sit $BO \propto 2$. Ergo $AO \propto 12$.

Et $CO \propto 7$.

$\square AO \ 144 \bigg| A.$
 $\square OG \ 4 \bigg|$

$\square AC \ 25 \bigg| M.$
 $\square CO \ 49 \bigg|$

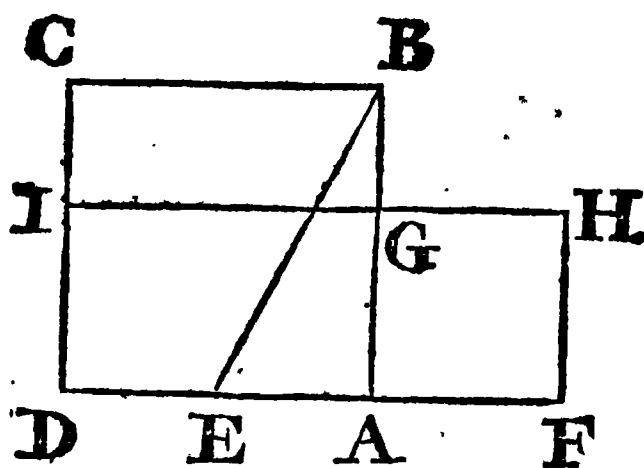
$\square ta \ OA. \ OG \ 148 \quad \square ta \ AC. \ CO \ 74 \bigg| A.$
2

Bis $\square ta \ AC. \ CO \ 148$

PROPOSITIO. XI.

Probl. I.

Datam rectam AB ita secare in G, ut rectangulum comprehensum sub tota linea AB & uno segmentorum BG sit æquale alterius segmenti AG quadrato.



CONSTRUCTIO.

1. Ducatur AD perpendicularis & æqualis ipsi AB.
2. Divisa AD bifariam in E, junge EB
3. Sumatur EF \square EB.
4. Fac AG \propto AF. Et dico factum esse quod quæritur.

DEMONSTRATIO.

Supra data AB compleatur \square AC, ut & supra AG \square AH & Recta HG producat in I.

□

$\square DF. FH$ (hoc est FA) $+$ $\square EA$
 \propto $\square EF.$ (hoc est $\square EB.$ a 6. 2.

Atqui $\square EB \propto \square AB.$ seu $\square AC$ b 47. 1.
 $+$ $\square EA.$

Ergo $\square DF. FH + \square EA \propto \square EA$
 $+$ $\square AC.$

Et ablato utrinque $\square to EA,$

$\square DF. FH \propto \square AC$
 $\square DG \quad \square DG$ c Ax. 3.

$\square AG \propto \square CG.$

Atqui $\square AH$ fit a segmento AG & \square
 CG continetur CB hoc est AB & altero
 segmento $BG.$

Ergo patet factum esse quod quærebatur?

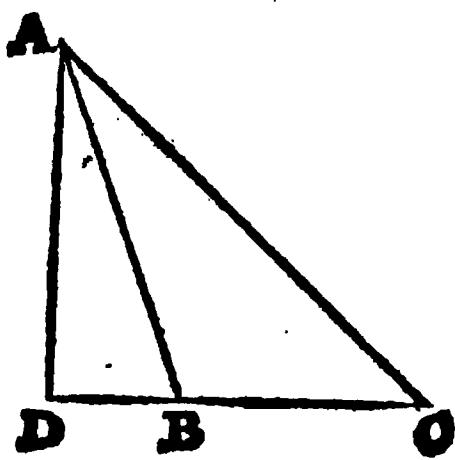
S C H O L I U M.

In numeris hæc propositio nullo solvi
 potest modo, cum radicis quadratæ ex-
 tractio, quæ hic requiritur non semper
 rationales numeros admittat.

PROPOSITIO XII.

Theor.
II.

In triangulo obtusangulo
 ABC quadratum lateris AC ,
 quod obtuso angulo opponitur,
 superat reliquorum laterum AB .
 BC quadrata, bis sumpto re-
 ctangulo, quod continetur sub
 latere CB , & sub ipsa BD
 in directum ei addita usque ad
 perpendicularem ab altero acu-
 to angulo A cadentem..



Dei

DEMONSTRATIO.

$$\square AC \propto {}^a \square AD + \square DC. {}^{a47. I.}$$

$$\text{Atqui } \square DC {}^b \propto \square DB + \square {}^{b4. II.} BC + 2 \square DBC.$$

Ergo hisce in locum $\square DC$
positis.

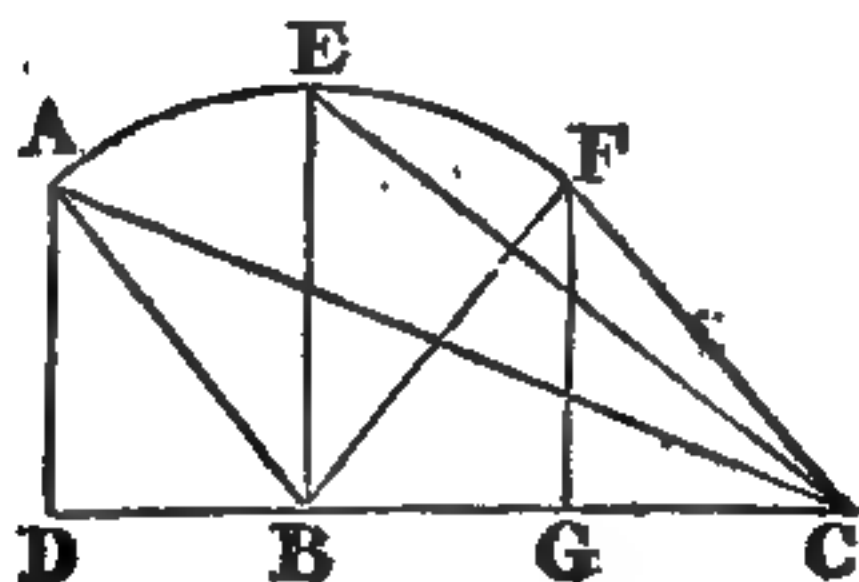
$$\square AC \propto \square AD + \square DB + \square BC + 2 \square DBC.$$

$$\text{Atqui rursus Duo } \square ta \ AD. \ DB \\ {}_a \propto \square AB.$$

Ergo hoc in illorum locum re-
posito.

$$\square AC \propto \square AB + \square BC + 2 \square DBC.$$

SCHOLIUM.



Hoc modo paulo aliter eadem propositio demonstrari potest.

Ex B erigatur perpendicularis BE ad
BA, & ducatur EC.

Hoc factō duo triangula ABC , EBC , habent duo latera AB , BC æqualia ipsis EB , BC : at vero angulum ABC \angle angulo EBC : Ergo per 24. I. basis AC erit $\angle EC$. Adeoque $\square AC \angle \square EC$ hoc est \square tis EB s. AB & BC .

Inde patet nihil aliud requiri, quam
inveniat' differentia \square torum AC.

a DC

$$\square AC \propto \square AD + \square DC.$$

$$\text{Atqui } \square DC \propto \square DB + \square BC + \\ + 2 \square DBC.$$

Ergo.

$$\square AC \propto \square AD + \square DB + \square BC \\ + 2 \square DBC.$$

$$\text{Atqui } \square AD \cdot DB \propto \square AB \cdot EB.$$

Ergo.

$$\square AC \propto \square EB + \square BC + 2 \square DBC \\ \square EC \propto \square EB + \square BC.$$

Quæ si a se invicem subtrahantur, erit
 $2 \square DBC$ differentia \square orum AC. EC
 seu excessus quo $\square AC$ superat $\square EC$,
 hoc est $\square EB \cdot BC$. seu $AB \cdot BC$.

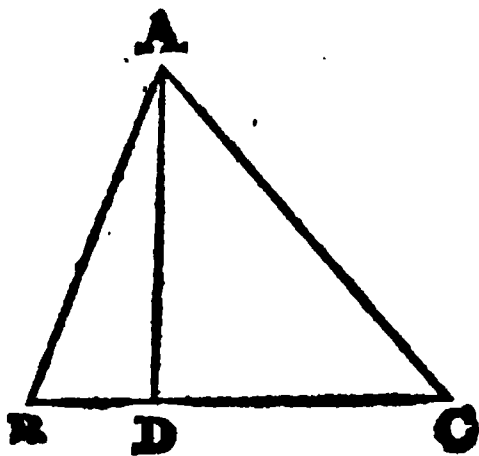
SCHOLIUM II.

Ex hac propositione deducitur gene-
 ralis Regula Geometrarum, qua ex tri-
 bus trianguli obtusanguli lateribus cog-
 nitis inveniunt basin productam vel illius
 segmentum BD. quæ imperat, ut a \square to
 AC demta summa \square orum AB. BC, re-
 liquum dividatur per duplum baseos BC;
 quæ operatio exhibebit quæsitam DB.

PROPOSITIO XIII.

Theor.
12.

In acutangulo triangulo ABC quadratum lateris AB, quod acuto angulo C opponitur, superatur a quadratis reliquorum laterum AC. BC, bis sumto rectangulo sub latere CB & sub assumpta interius linea CD usque ad occursum perpendicularis ab altero angulo acuto A cadentis.



De-

DEMONSTRATIO.

$$\begin{array}{rcl} \square BC + \square DC \propto^2 \square BC. & & 27. II. \\ \quad \square CD + \square BD. & & \\ \quad \square AD & \square AD & / A. \end{array}$$

$$\square BC + \square AD + \square DC \propto \square AD + \square DB + 2 \square BCD.$$

Atqui duo \square ta AD. DC
 $\propto \square$ AC.

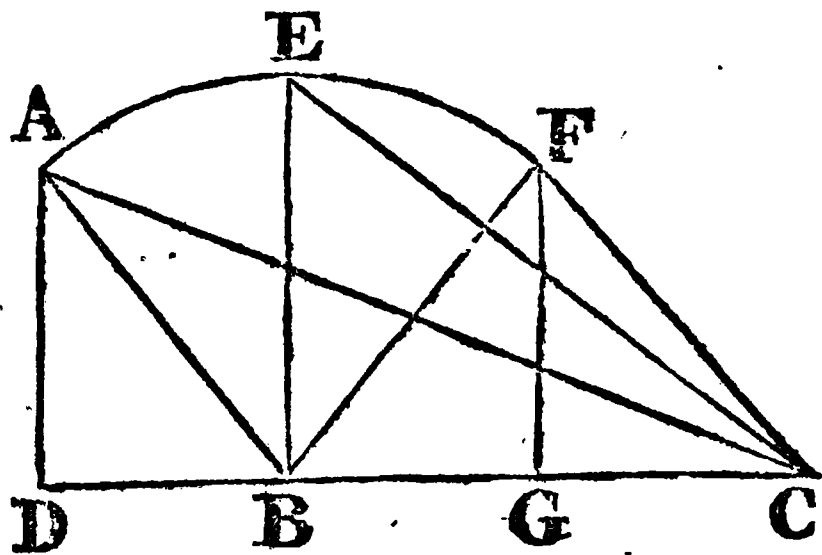
Et duo \square ta AD. DB 47. I.
 $\propto \square$ AB.

Ergo his in illorum locum
 substitutis.

$$\square BC + \square AC \propto \square AB + \square BC. CD.$$

Q. E. D.

Alia demonstratio



Triangulum acutangulum sit, FBC , demonstrandum est duo \square ta $FB. BC$, superare \square FC per duplum \square CBG .

Ex B erigitur perpendicularis $BE \propto BF$, & ducatur EC , tum duo triangula $EBC. FBC$, habebunt duo latera $EB. BC$, \propto lateribus $FB. BC$ & angulum $EBC < FBC$: quare per 24. I. latus EC erit $< FC$. Adeoque EC hoc est duo \square ta EB . seu FB , BC erunt $< \square$ FC .

Unde

Unde si $\square FC$ subtrahatur a $\square EC$; obtinebitur differentia seu excessus, quo $\square ta FB. BC$ superat $\square FC$, adeoque demonstrata erit propositio.

$$\square EC \propto \square EB \text{ f. } \square FB - \square BC.$$

Atqui

$$\square BC \propto \square BG - \frac{1}{2} \square BGC - \square GC.$$

Ergo facta substitutione

$$\square EC \propto \square FB - \square BG - \frac{1}{2} \square BGC \text{ s}$$

$$\square FC \propto \square FB - \square BG - \square BC.$$

$$\square EC - \square FC \propto \frac{1}{2} \square BG \text{ f. } \frac{1}{2} \square BG. BG - \frac{1}{2} \square GC. BG$$

Seu

$$\frac{1}{2} \square BC. BG.$$

Hoc est duplum \square sub basi BC & segmento BG ; pro differentia qua $\square EC$, hoc est duo $\square ta EB. \text{ f. } FB - BC$ excedunt $\square FC$.

SCHOLIUM I.

Simili operatione quoque innotescet, differentia \square torum AC & FC : quorum primum oppo-

Dd 2

ni-

nitur angulo obtuso ABC. alterum vero acuto FBC.

$$\left. \begin{array}{l} \square AC \propto \square AB \perp \square BC \perp 2 \square \\ DB.BC. \quad 12. II. \\ \square CF \propto \square FB \text{ seu } \square AB \perp \square \\ BC 2 \square BG.BC. \quad 13. II. \end{array} \right\} S$$

$$\square AC - \square CF \propto 2 \square DB.BC \perp \\ 2 \square BG.BC.$$

$$\text{seu } 2 \square DG.BC.$$

Ex quo calculo sequitur hoc
Theorema.

Si triangulum obtusangulum ABC cum acutangulo FBC latera AB. BC lateribus FB. BC æqualia habeat; quadratum lateris obtuso angulo oppositi AC, superabit quadratum lateris acuto angulo oppositi FC, per duplum rectangulum quod fit a basi BC, & DG inter duas perpendiculares AD. FG intercepta.

Scho -

SCHOLIUM II.

Hinc iterum fluit Geometrarum regula ad inveniendum baseos segmentum CD , ex tribus trianguli acutanguli lateribus cognitis: quod invenitur si a summa \square torum $AC. CB.$ (circa angulum segmento adjacentem) subtrahatur $\square AC$, & reliquum per duplam basin BC dividatur.

DEMONSTRATIO.

$\square DC. CB$ (seu CF) \perp $\square GC$ b ∞ b 5. II.

$\square GF. f. \square GH.$

Atqui $\square GH$ c ∞ $\square GC$ \perp $\square CH.$ c 47. I.

Ergo his in illius locum substitutis.

$\square DC. CB$ \perp $\square GC$ ∞ $\square GC$ \perp

$\square CH.$

Si auferatur utrimque $\square GC.$

$\square DCB$ ∞ $\square GH.$

Atqui $\square DCB$ ∞ rectilineo A
per constr.

Ergo $\square CH$ etiam est ∞ eidem
rectilineo A.

Q. E. D.

Elementorum Libi Secundi Finit.

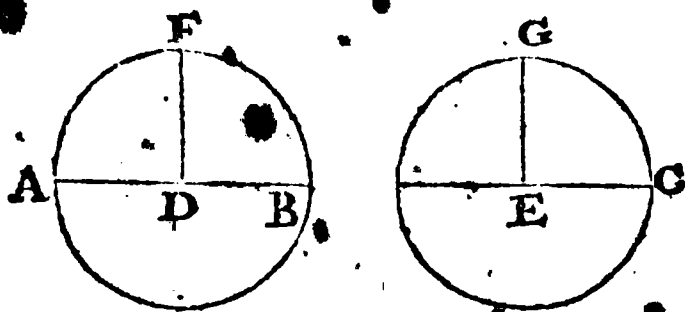
EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER TERTIUS.

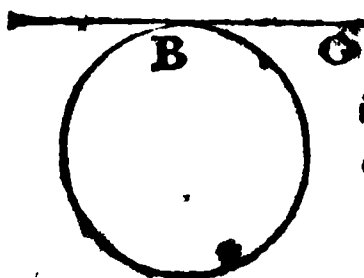
DEFINITIONES.

I.



Aequales circuli sunt, quorum diametri AB. BC. sunt æquales: vel quorum, quæ ex centris D. & E. rectæ lineæ DF. EG. sunt æquales.

II:

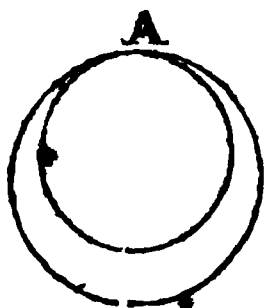


cat.

Recta circulum tangere dicitur, quæ cum circulum tangat puta in B. si produçatur in C. circulum non se-

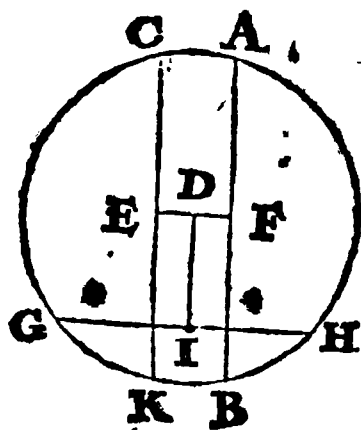
III.

III.



Circuli se mutuo tangere dicuntur qui sese mutuo tangentes ut in A. sese mutuo non secant.

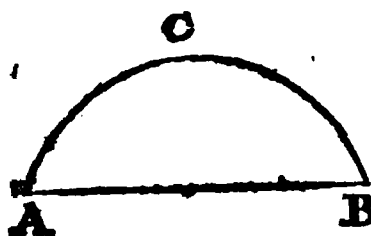
IV.



In circulo equaliter distare à centro rectæ dicuntur, cum perpendiculares DE. DF. à centro D. ad ipsas AB. CK.

ductæ æquales sunt; longius autem abesse dicitur GH. in quam major perpendicularis DI. cadit.

V.

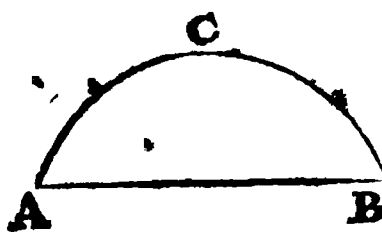


Segmentum circuli, est figura quæ sub recta AB. & circuli periphæria ACB. comprehenditur.

Ee.

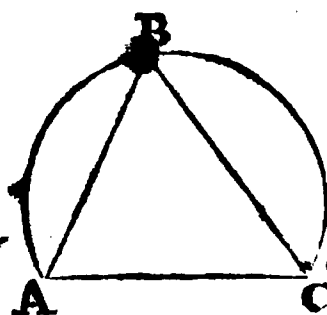
VI.

VI.



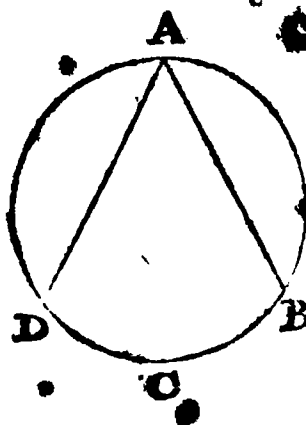
Segmenti autem
angulus est CAB .
qui sub recta linea
 AB . & circuli
peripheria CA . comprehenditur.

VII.



In segmento au-
tem angulus est puta
 ABC . cum in se-
gmenti circumfereñ-
tia sumptum fuerit
punctum quodpiam B . & ab eo in
terminos rectæ AC . segmentum
terminantes, lineæ rectæ ut BA .
 BC . fuerunt ductæ.

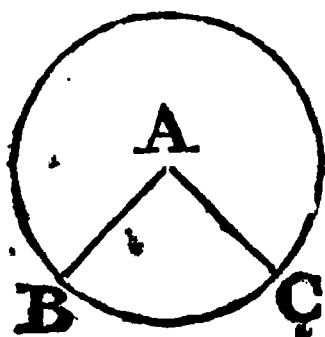
VIII.



Cum vero com-
prehendentes angu-
lum DAB . rectæ
 AD . AB . aliquam
assumunt peripheri-
am ut BCD . illi
angulus dicitur insi-
stere.

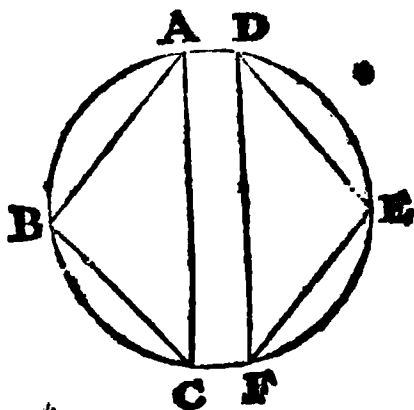
IX.

IX.



Sector circuli est, cum ad ipsius circuli centrum A. angulus BAC. fuerit constitutus : comprehensa nimirum figura & à rectis AB. AC. angulum BAC. continentibus, & à peripheria BC. ab illis assumpta.

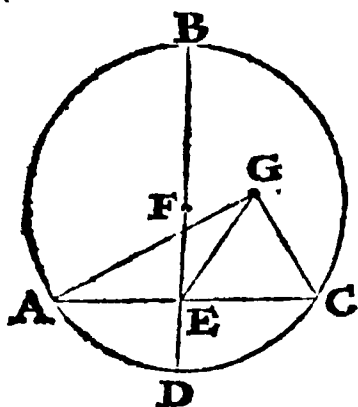
X.



Similia circuli segmenta sunt ABC. DEF. quæ angulos BAC. EDF. capiunt æquales, aut in quibus anguli CBA. FED. inter se sunt æquales.

PROPOSITIO I.

Probl. I.



*Dati circuli
ABC centrum F
reperire.*

CONSTRUCTIO.

a 10. I.

1. Ducta quælibet AC, a dividatur
bifariam in E.

b 11. I.

2. Ex E erigatur utrinque b perpen-
dicularis BD usque peripheriam.

3. Illa bifariam dividatur in F.

Dico punctum F esse centrum
circuli.

DEMONSTRATIO.

Centrum aut est in BD, aut extra
illam.

Si sit in BD, necessario est in puncto,
quod illam dividit bifariam; quia Circuli
radii sunt æquales; adeoque centrum est
in F.

Si juxta Adversarium sit extra BD,
ponatur illud ex: gr: in G: tum ductis
AG.

LIBER TERTIUS. 221

AG. EG. CG in triangulis GEA.
GEC.

Latus GA \propto GC, quia ponuntur radii. ^{c Def. 15. I.}

Latus EA \propto EC per constructionem.

Latus GE commune.

Ergo omnes anguli sunt æquales ^{d 8. I.}
adeoque Ang. GEA \propto GEC.

Ergo \angle GEA est rectus.

Atqui BEA est rectus per constructio- ^{c Def. 10. I.}
nem.

Ergo ang. GEA \propto BEA. totum &
pars, quod est absurdum.

Et eadem demonstratio obtinet in
omnibus punctis quæ possunt assignari ex-
tra lineam BD: unde concludendum est
illud extra BD non reperiri.

Ergo in BD & quidem ejus puncto F
illud erit. Q. E. D.

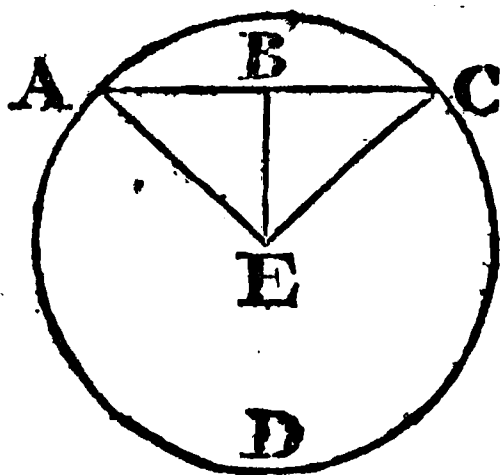
COROLLARIUM.

Si linea recta in Circulo aliam lineam
rectam bifariam & ad angulos rectos se-
cat; in illa secante erit centrum.

PROPOSITIO. II

Theor. I.

*Si in peripheria Circuli ADC
duo qualibet puncta A. C. su-
mantur, recta AC, qua per il-
la ducitur, intra circulum ca-
dit.*



DEMONSTRATIO.

Ex invento Centro E. ductis radiis
EA. EC, ad rectam AC ducatur EB.

Tum in Triangulo. EAC.

Latus EA \propto EC quia radii.

Ergo ang. A \propto C. 5. I.

Atqui

Atque externus $EBA^a <$ interno C . a 16. 1.

Ergo EBA etiam $< A$.

Adeoque in triangulo EBA latus EA oppositum angulo maximo erit $b <$ latere EB . b 19. 1.

Atque latus EA pertingit tantum ad peripheriam.

Ergo latus EB cadit intra circulum.

Et eadem demonstratio applicari potest ad omnia puncta lineæ AC .

Ergo tota linea AC cadit intra Circulum. Q. E. D.

COROLLARIUM.

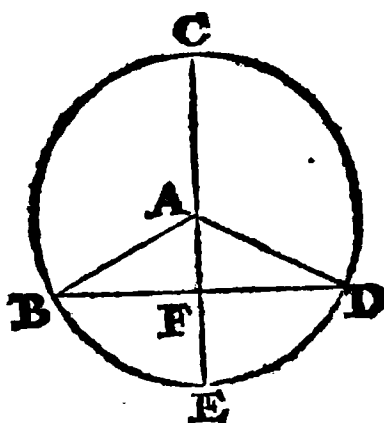
Linea recta Circulum tantum in uno puncto tangit.

PROPOSITIO III.

Theor. 2.

P A R S I.

Si in circulo recta quedam CE per centrum A ducta, aliam BD non per centrum ductam, bifariam in F secet; etiam illam ad angulos rectos secabit.



P A R S II.

Et si ad angulos rectos eam secet; bifariam quoque secabit.

DEMONSTRATIO.

Pars I. Ductis radiis AB. AD, in triangulis AFB, AFD.

Latus

Latus AB \propto AD quia radii.

Latus FB \propto FD per propositionem.

Latus AF commune.

Ergo omnes anguli sunt inter se æquales, per 8. I. adeoque Ang. AFB \propto AFD. qui propterea sunt a recti.

a Def.
10. I.

Pars 2. In iisdem triangulis AFB. AFD.

Ang. ABF \propto ADF. qui triang. BAD est Isosceles.

Ang. AFB \propto AFD per propositionem.

Latus AF commune.

Ergo latus BF^b \propto FD.

b 26. I.

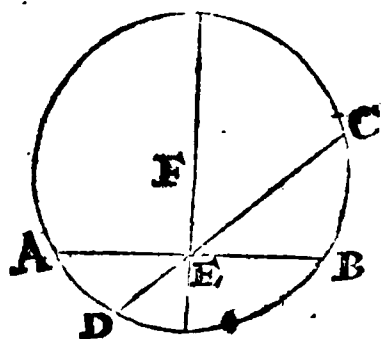
Q. E. D.

COROLLARIUM.

In omni triangulo æquilatero seu Isoscele linearecta basin bifariam secans, ad eandem perpendicularis est & contra.

Theor. 3.

PROPOSITIO. IV.



Si in circulo dua rectae AB. DC non ambae per centrum ductae, se invicem secant: illae sese non secabant bifariam.

DEMONSTRATIO.

Duplex hic obtinet casus.

Casus I. Aut una tantum transit per centrum, ut ex: gr; FE, patet illam ab altera CB non secari bifariam: quia illa per hypothese[m] non transit per centrum.

Casus 2. Aut neutra transit per centrum.

Si jam Adversarius contendat duas lineas AB. DC se mutuo secare bifariam in E, ex centro F, ducatur recta FE.

Tum FE secat AB bifariam, Ergo ang. FEB est rectus.

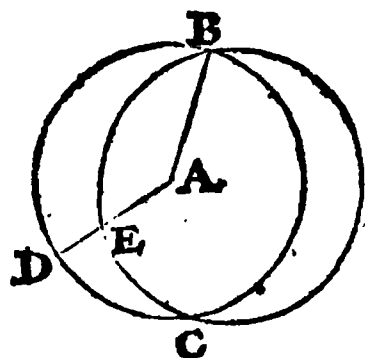
Eadem FE secat DC bifariam, Ergo ang. FEC est rectus.

Ergo erit ang FEB \propto FEC. Totum & pars: quod est absurdum.

PRO-

PROPOSITIO V.

Theor. 4



*Si duo circuli BDCB.
BEC, sese mutuo secant
non habebunt idem cen-
trum.*

DEMONSTRATIO.

Si quis ponat A esse commune utrius-
que centrum, ducatur AB ab illo centro
A ad punctum intersectionis B. ut & AD.

Linea AB \propto AD; quia radii circuli
BDC.

AB \propto AE. quia radii circuli
BEC.

Ergo AD \propto AE. Quod est absurdum.

^a Ax. I.

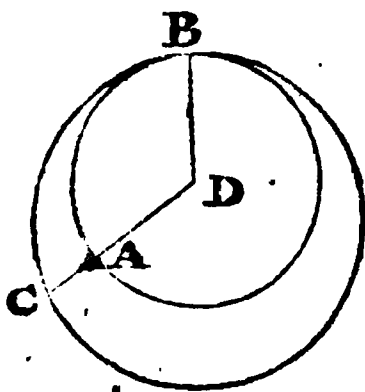
At eadem demonstratio obtinet in
omnibus punctis, quæ intra commune
utriusque circuli spatium sunt posita.

Ergo universim patet veritas propo-
sitionis. Q. D. E.

Theor. 5.

PROPOSITIO VI.

*Si duo circuli BA. BC se
mutuo interius tangant in B :
non erit illorum idem centrum.*



DEMONSTRATIO.

Si contendat aliquis punctum
ex: gr: D esse commune illorum
centrum; ductis DB. DC erit.

$DB \propto DC$. quia sunt radii cir-
culi BC.

$DB \propto DA$, quia sunt radii cir-
culi BA.

Ergo

Ergo $DC^a \propto DA$. Totum & $a Ax$ 1;
pars: quod est absurdum.

Adeoque cum eadem demon-
stratio omnibus punctis utrique
círculo communibus possit appli-
cari, non habebunt isti circuli
unum & idem centrum.

Q. E. D.

Theor. 7.

PROPOSITIO VII.

Si in circulo quovis extra centrum F accipiatur punctum G , ex quo quedam rectæ GA . GC . GD . GE . GN . in circulum cadant.

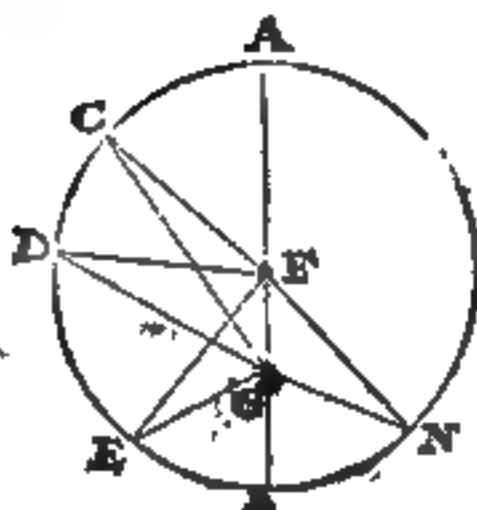
Tum

1. Maxima erit GA , quæ per centrum F transit.

2. Minima erit reliqua diæmetri pars GB .

Immo vero major est GC , quam GA propter.

plures quam duæ ab F ad circumferentiam æquales.



De.

DEMONSTRATIO.

Pars 1. Ducta FC. in triangulo GFC

Duo latera GF. FC \angle^a GC.

a 20. I.

Atqui GF. FC \propto GA. quia FC
 \propto FA.

Ergo GA \angle GC.

Pars 2. Ducta GE. In Triangulo FGE

Duo latera FG. GE \angle^a FE. hoc

est FB. S

FG

FG

GE b \angle

GB

b Ax.

Pars 3. Ducta GD, in triangulis
CFG. DFG.

Latus CF \propto DF.

Latus FG utrique commune.

Sed Ang. CFG \angle DFG.

Ergo basis CG c \angle DG.

c 24. I.

Pars 4. Patet ex præcedentibus; nam
si tres possent æquales GD. GE. GN du-
ci; tum forent duæ GD. GE ad ean-
dem partem inter se æquales.

Quod repugnat parti 3.

Pro-

Theor. 7. PROPOSITIO VIII.

*Si a puncto A extra circum-
lum accepto ad circumulum ducan-
tur quedam rectæ AH. AG.
AF.*

1. *Earum que in cavam
peripheriam incidunt maxima e-
st H, que per centrum L*

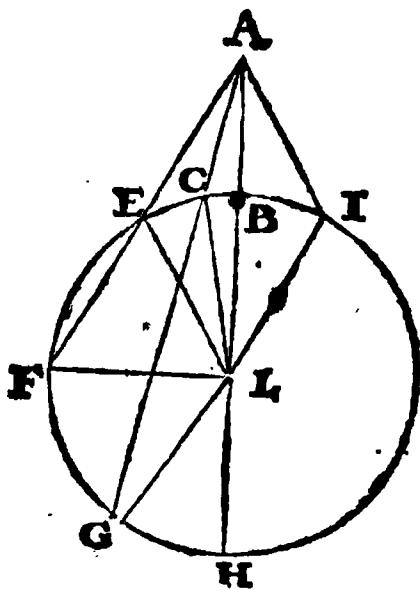
*Aliarum major est ea,
que maxima AH pro-
pior.*

3. *Extra circumulum minima
est AB, que producta per cen-
trum transit.*

4. *Que minima propior AC
remotiore AE minor erit.*

5. *Non*

§. Non plures quàm duæ ex dicto puncto *A* in peripheriam duci possunt æquales sive intra circulum sive extra.



DEMONSTRATIO.

Pars I. Ducta recta LG. in triangulo ALG.

Duo latera a AL. LG \leq AG. a 20. I.

Atqui AL. LG \propto AH.
quia LG \propto LH.

Ergo AH \leq AG.

Gg

Pars

Pars 2. Ducta linea LF, in triangulis
ALG. ALF.

Latus AL utrique commune.

Latus LG \propto LF. quia sunt radii.

Atqui ang. ALG \angle ALF.

b 24. I.

Ergo basis AG b \angle basi AF.

Pars 3. Ducta LC. in triangulo ACL.

Duo latera AC. CL. b \angle AL. } S
CL. \propto BL. }

c Ax. 4.

Remanet AC \angle c AB.

Pars 4. Ducta LE, in triangulis AEL.
ACL.

Duo latera exteriora

d 21. I.

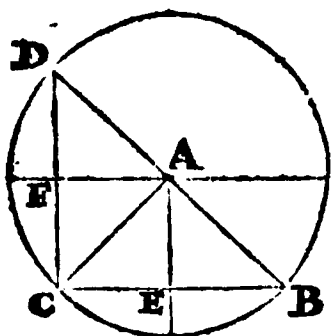
AE. EL d \angle AC. CL. } S
LE \propto LC. }

Remanet AE \angle AC.

Pars 5. Patet ex præcedentibus; nam
ducta AI \propto AE. quæ intra AI ducitur
erit illâ minor: quæ extra. illâ major:
adeoque ex A non possunt dari plures
quam duæ quæ sint æquales. Q. E. D.

PROPOSITIO IX.

Theor. 8.



Si ab aliquo intra Circulum puncto A plures quam duæ rectæ æquales AB. AC. AD ad peripheriam duci possint: Illud punctum erit centrum.

DEMONSTRATIO.

Ductas rectas DC CB. divide bifariam in F & E per rectas FA. EA.

Tum in triangulis AFD. AFC.

Latus AF utrique commune.

Latus AD \propto AC. per propositionem.

Latus FD \propto FC. per constructionem.

Ergo Ang. AFD \propto AFC, & uterque \propto rectus: adeoque in perpendiculari FA erit centrum. a 8. I.
b Def.
10. I.
c Coroll.

Deinde eodem modo per triangula AEC. AEB demonstratur centrum etiam esse in perpendiculari EA. 1. III.

Ergo necessario erit in puncto intersectionis A. quia duæ lineæ FA. EA præter illud nullum habent commune.

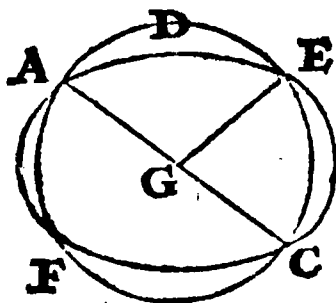
Q. E. D.

G g 2

Tre-

PROPOSITIO X.

Theor. 9.



*Duo circuli
ADE. AFC se
mutuo non secant in
pluribus quam duo-
bus punctis.*

DEMONSTRATIO.

Juxta Adversarii opinionem
ponantur se invicem secare in
tribus punctis A. E. C. Tum ex
invento circuli ADE centro G.
ducantur rectæ. GA. GE. GC :
quæ sunt æquales: quia sunt ra-
dii circuli ADE.

a 9. II.

Atqui tres istæ æquales GA. GE. GC
etiam pertingunt ad peripheriam alterius
circuli AFC: ergo punctum G illius
quoque a erit centrum.

b 5. III.

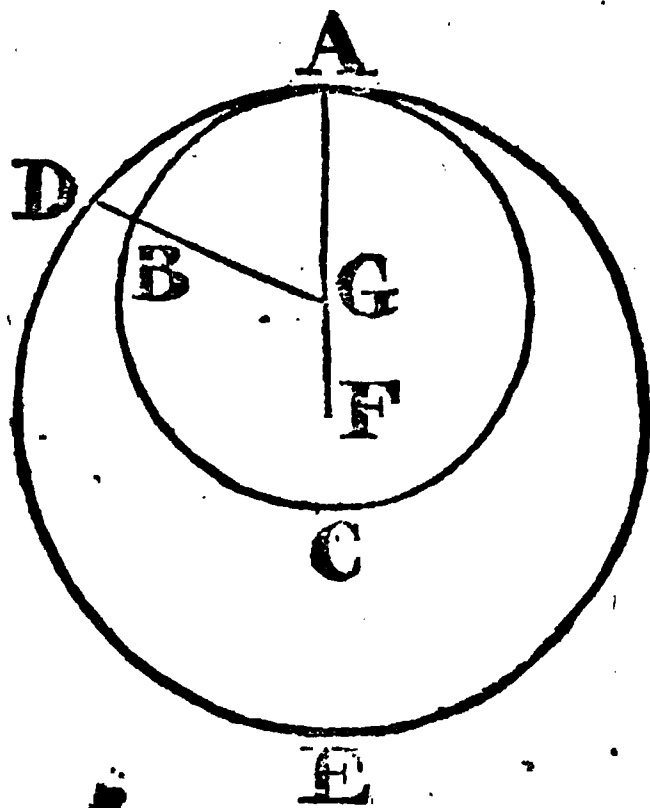
Adeoque duo circuli se invicem secan-
tes haberent idem centrum. b quod est
absurdum.

Pro-

PROPOSITIO XI.

Theor.
10.

Si duo circuli se interius tangant in A, recta FG illorum centra F. G. conjungens, si producat, transibit per contactum A.



DEMONSTRATIO.

Si juxta Adversarium non cadat in A, cadat aliorsum in D.

• G g 3

Tum

Tum

S { Recta $FGD \propto FGA$ quia sunt
radii majoris circuli.
FG FG

$GD \propto GA.$

Atqui $GB \propto GA.$ quia sunt radii minoris circuli.

Ergo $GD \propto GB.$ Totum & pars. quod est absurdum.

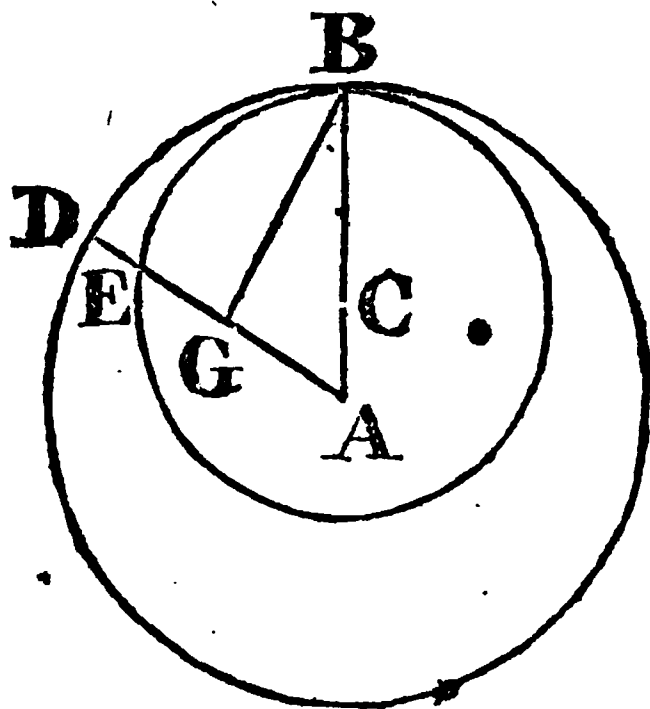
Atqui eadem demonstratio habet locum quandiu inter puncta D & B manet aliquod interstitium; seu quandiu illa puncta non coincidunt hoc est quandiu linea GD non transit per contactum.

Ergo FG producta cadit in contactum A.

Q. E. D.

Scho-

SCHOLIUM.



Potest hæc propositio sic converti.

Si duo circuli se mutuo interius tangant, & a puncto contactus B, ad centrum unius circuli ducatur Recta, tum in illa aut illius producta quoque erit centrum alterius circuli.

DEMONSTRATIO.

Duplex hic obtinet casus: Aut enim ducta est BA ex contactu ad

ad centrum majoris circuli: Aut ducta est BC ex contactu ad centrum minoris circuli C.

CASUS I.

Si centrum minoris circuli non sit in linea BA, sit extra illam in puncto G. ducantur lineæ BG & AD per G.

A. $\left\{ \begin{array}{l} GE \propto GB. \text{ quia sunt radii minoris} \\ \text{circuli.} \\ AG \quad AG. \text{ juxta Adv.} \end{array} \right.$

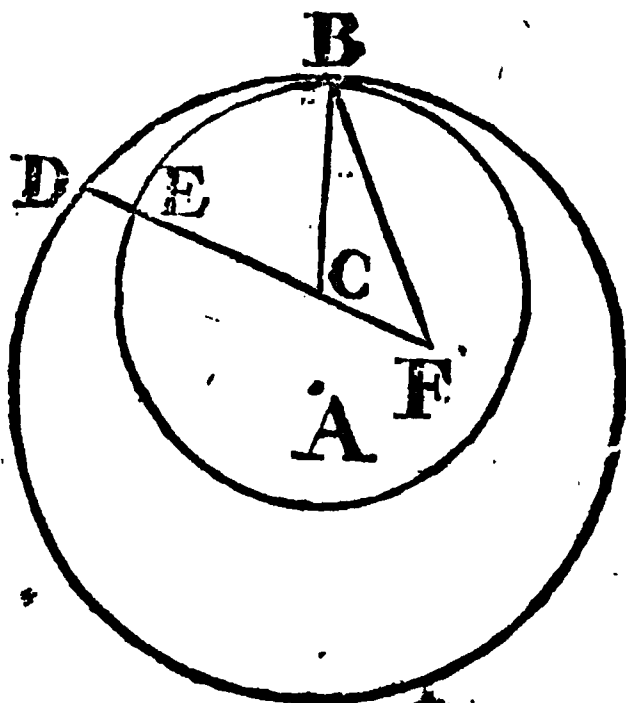
$$AE \propto AG \perp GB.$$

Atqui $AG \perp GB < AB. \text{ s. } AD. 20. I.$

Ergo $AE < AD.$ pars major toto.

Et eadem demonstratio habet locum in omnibus punctis assignatis extra lineam BA. Ergo centrum minoris circuli reperitur in linea BA. *

CASUS II.



Sit centrum majoris Circuli extra rectam BC, aut illius productam, in puncto F. Ducantur BF & DF per C.

Eritque

$\frac{CE}{CF} \propto \frac{CB}{CF}$. quia radii minoris circuli.

$FE \propto FC \perp CB$,

Atqui $FC \perp CB < FB$ f. ED.

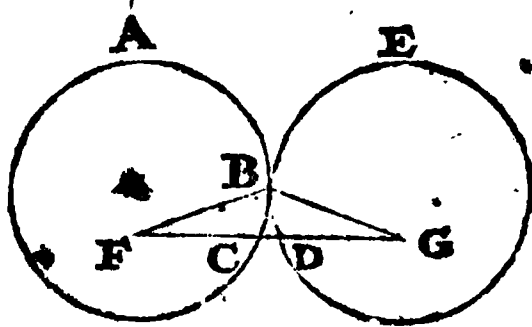
Ergo $FE < FD$. pars toto.

Q. E. A.

Theor.
II.

PROPOSITIO XII.

Si duo circuli se invicem exterius contingant in B. Recta quæ illorum centra conjungit, per contactum transibit.



DEMONSTRATIO.

Si Adversarius hoc neget, sint si fieri potest centra ita constituta, ut recta FG. illa conjungens non transeat per punctum contactus B, sed circulos secet in C & D. Tum ductis FB. GB, in triangulo FBG.

La-

Latera $FB. BG$ \leq FG .

a 20. L

Atqui $FB. BG$ \propto partibus $FC.$
 $GD.$

Ergo $FC. GD$ \leq tota $FG.$
quod est absurdum.

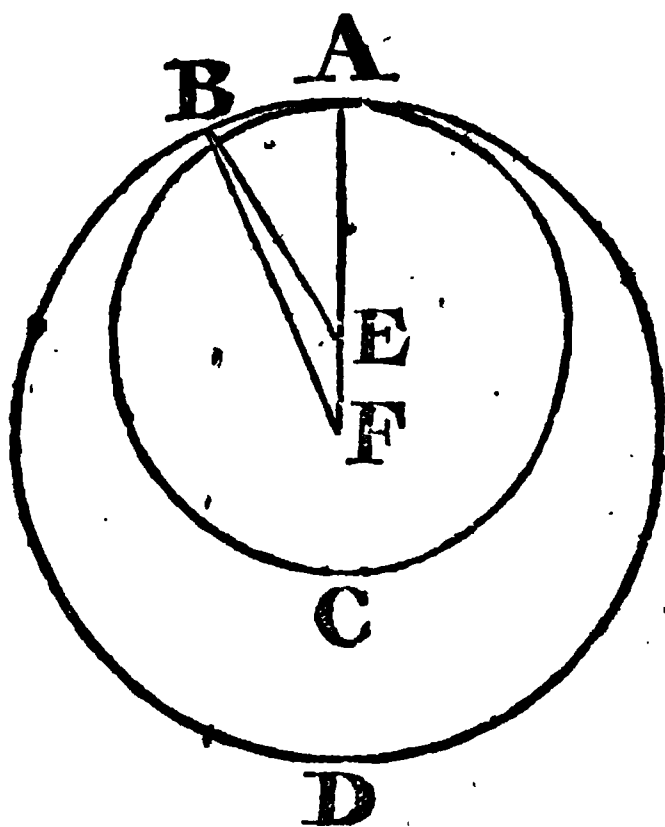
Eadem demonstratio vim habebit quandiu puncta C & D non coincidunt : quod solummodo fit in puncto contactus B . Ergo linea centra conjungens per illud transire debet.

Q. E. D.

Theor.
12.

PROPOSITIO XIII.

Circulus circulum non tangit in pluribus punctis quam uno; siue intus, siue extra tangat.



DEMONSTRATIO.

Casus I. Circulus ABC tangat (juxta Adversarium) in duobus punctis A & B:

II. Tum recta FE, tendet a ad puncta contactus A & B; ducatur FB.

$FE \perp EB \propto FA$, quia sunt radii ejusdem circuli.

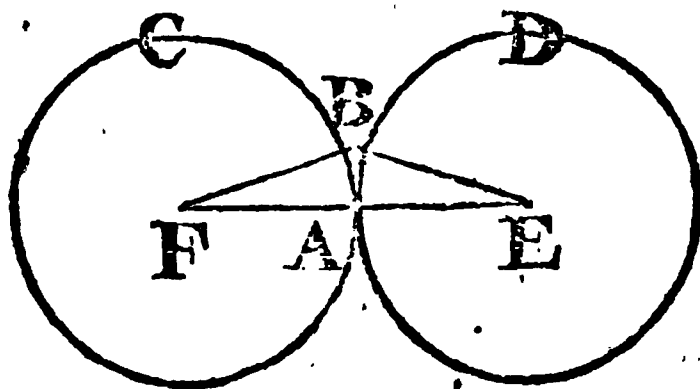
At-

Atqui $FB \propto FA$ propter eandem rationem.

Ergo $FE \perp EB \propto FB$. Quod est absurdum. ^{b 20. 1.}

Casus II. Circulus ABC (si non in uno) in duobus punctis tangat circulum ABD. sc. in A & B, Recta FE quæ centra conjungit transit per c contactum ^{c 12. II.} A:

Atqui (juxta adversum, qui etiam contactum in B ponit) illa etiam transit per B, ut linea FBE sit linea recta.



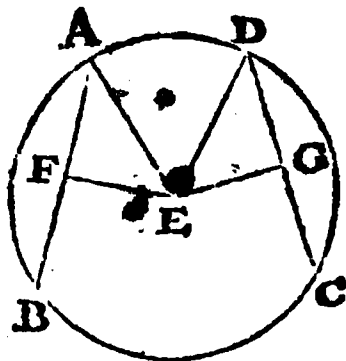
Ergo hinc sequeretur duas rectas FBE, FAE comprehendere spatium. Quod est absurdum. ^{d Ax. 12.}

PROPOSITIO. XIV.

Theor.
13.

1. *Æquales rectæ AB. DC in circulo æqualiter a centro distant.*

2. *Et æqualiter a centro distantes inter se æquales sunt.*



DEMONSTRATIO.

PARS I.

a3. III. Ex centro E ductæ perpendiculares EF. EG, lineas ^{a2} AB. DC bisecabunt; & quia totæ sunt æquales erunt & semisses AF. DG æquales: ducantur radii EA. ED.

In triangulis rectangulis AFE DGE.

□ta

$$\begin{array}{l} \square ta AF.FE \propto \square AE. \\ \square ta DG.GE \propto \square DE. \end{array} \quad 47. I.$$

Atqui $\square AE \propto \square DE.$ quia fiunt
a radiis.

$$\begin{array}{l} \text{Ergo } \square ta AF.FE. \propto \square tis DG GE \\ S, \square AF \propto \square DG. \end{array}$$

Remanet $\square FE \propto \square GE.$

Ergo linea $FE \propto GE$ adeoque
distantiæ æquales.

P A R S II.

Supra erant

$$\begin{array}{l} \square ta AF.FE \propto \square tis DG GE \\ \square FE \propto \square GE. \end{array} \quad S$$

$$\square AF \propto DG.$$

Ergo ipsa $AF \propto DG.$ & ipsarum
dupla.

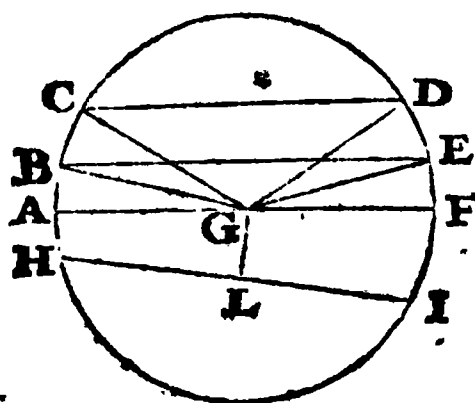
$$AB^b \propto DC.$$

Q. D. E.

^b Ax. 6.

Pro-

PROPOSITIO XV.

Theor.
14.

I. In cir-
culo *ABCD*
recliarum in-
scriptarum
maxima est
Diameter
AF.

2. *Reliquarum vero ea BE ma-*
jor quæ centro propior.

DEMONSTRATIO.

Pars I. Ductis GB. GE. in triangulo
BGE.

20. I. Duo latera a BG. GE \angle BE.

Atqui BG. GE \propto AF. Diametro.

Ergo AF \angle BE.

Pars II. Ductis GC. GD : in triangulis
BGE, CGD.

Latus BG \propto CG } Quia sunt
Latus GE \propto GD radii.

At ang. BGE \angle CGD.

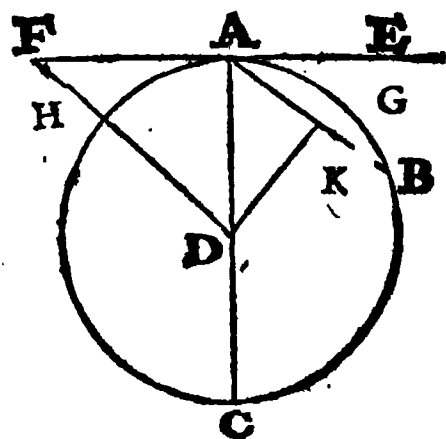
24. I. Ergo basis BE \angle CD.

Q. D. E.

Pre

PROPOSITIO XVI.

Theor.
15.



Si per extremitatem diametri A ducatur perpendicularis FE.

1. *Illa cadet extra circulum.*

2. *Neque inter ipsam & circulum*

alia recta ad contactum A duci potest, qua circulum non secet.

DEMONSTRATIO.

Pars I. Ex centro D ad quodlibet punctum F ducta DF, erit in triangulo DAF.

Angulus A \angle F. quia angulus A rectus.

Ergo Latus (a) DF \angle latere DA.

Atqui DH \cong DA. quia sunt radii.

a 19. L

Ergo DF \angle DH. Adeoque quia punctum H est in circumferentia erit F extra.

Idem ratiocinium omnibus punctis lineae FAE potest applicari: adeoque tota FE (excepto puncto A) erit extra circulum.

Pars 2. Ponat adversarius rectam AB posse duci inter AE. & circulum absque circuli sectione. Ex centro D ad AB ducatur perpendicularis DK. Eritque in triangulo DKA.

Ii

Ang.

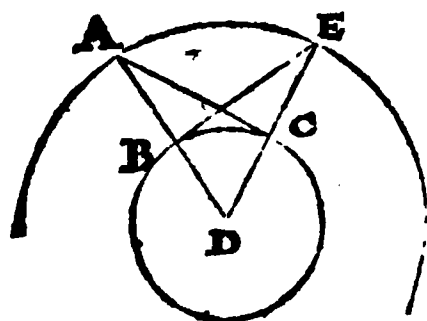
Ang. $\angle DKA < \angle DAK$.
 Ergo latus $DA < DK$.

b 19. I.

Atqui DA pertingit ad peripheriam.
 Ergo cadit DK intra Circulum; adeoque linea AK illum secat.

COROLLARIUM.

Hinc rursus patet rectam lineam Circulum tantum in uno puncto tangere : nam demonstratum est totam rectam FE cadere extra circulum excepto unico puncto A ; adeoque in illo se se tantum contingunt.

PROPOSITIO XVII. Probl. 2.

*A dato puncta
A rectam lineam
AC ducere quæ
circulum datum
BCD tangat.*

CONSTRUCTIO.

1. Ex puncto A ad centrum ducatur recta AD.
2. Centro D radio DA describatur circuli arcus AE.
3. Ex puncto B erigatur perpendicularis BE.
4. Juncta ED, ducatur AC.
Dico lineam AC tangere circulum.

DEMONSTRATIO.

In triangulis ADC. EDB.

Latus AD \propto ED } Quia sunt radii co-
Latus DC \propto DB } rumdem circulorum.
Angulus D communis.

Ergo ^a Ang. ACD \propto EBD.

Atqui Ang. EBD est rectus per const.

^a 4. I.

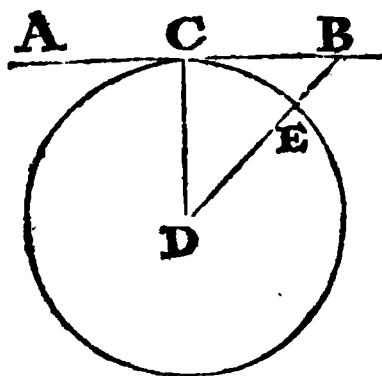
Ergo etiam ACD est rectus : adeoque
linea AC ^b tangit circulum.

^b 16. III.

Ii 2

Pro-

PROPOSITIO XVIII.

Theor.
16.

*Si recta linea AB tangat circum-
tum, quæ ex cen-
tro D ad conta-
ctum C ducitur
DC; illa tangen-
genti AB perpendicularis erit.*

DEMONSTRATIO.

Si neget Adversarius; Sit alia quæ-
dam DB perpendicularis ad tangentem:
tum in triangulo DCB,

Angulus DBC \angle DCB. juxta Ad-
versarium.

a 19. I.

Ergo latus DC \angle DB. a.

Atqui DC \propto DE.

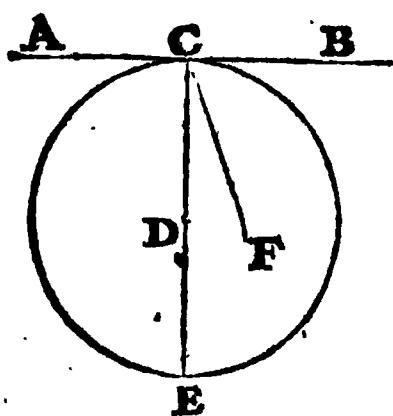
b Ax. 9.

Ergo DE \angle DB. Pars major to-
tò: quod est b absurdum. Et eadem de-
monstratio habet locum in omnibus pun-
ctis lineæ CB.

PRO-

PROPOSITIO XIX.

Theor.
17.



*Si recta linea AB
tangat circulum, &
ex contactu C ducatur
perpendicularis
CE in illa erit cen-
trum.*

DEMONSTRATIO.

Si hoc ab Adversario negetur ; alibi
centrum assignare debet : Sit hoc in F :
tum ducta FC erit

Ang. ECB rectus. per proposit.

Atqui FCB a etiam rectus juxta posi- a 18. III.
tionem Adversarii.

Ergo ECB \propto FCB. Totum & pars:
quod est absurdum.

Eadem autem demonstratio locum ha-
bet ubicunque ab adversario centrum po-
natur extra lineam CE.

Ergo in linea CE reperitur centrum.

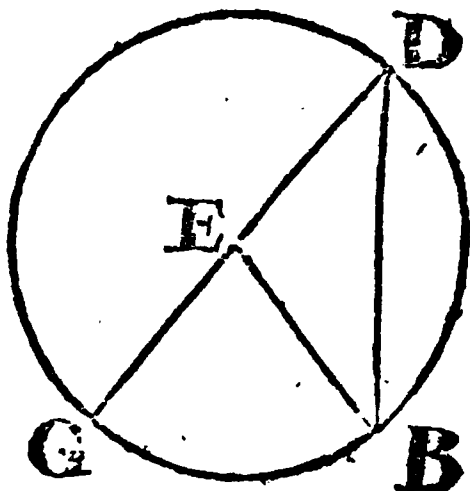
Q. E. D.

Theor.
18.

PROPOSITIO XX.

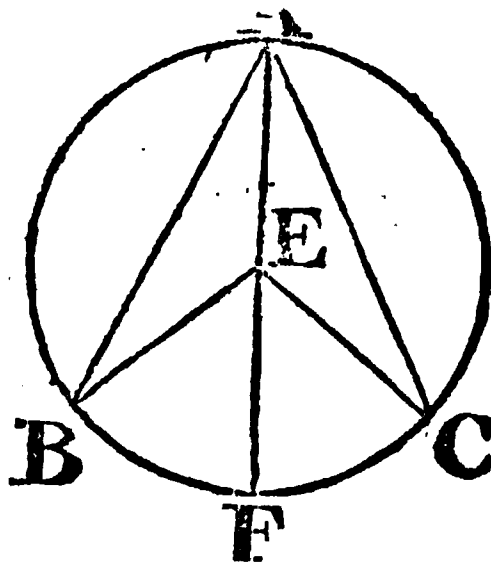
Angulus ad Centrum GEB duplus est anguli GDB ad peripheriam, cum idem arcus GB est basis angulorum.

DEMONSTRATIO.



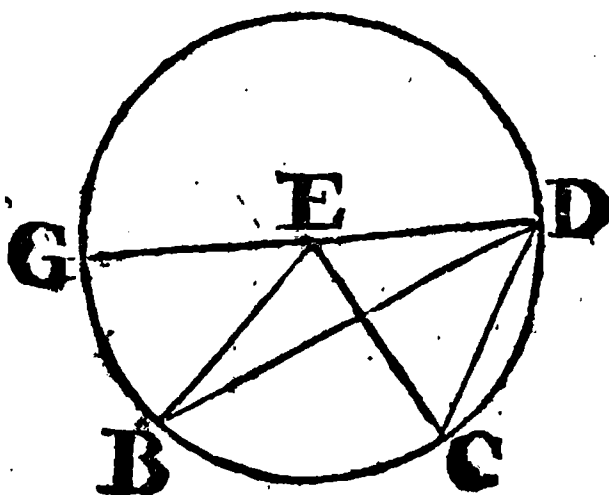
Casus I. In triangulo Isoscele
 Angulus GEB \propto ang. D \perp B. 16. I.
 Atqui D \propto B. 5. I.
 Ergo GEB, duplus anguli D.

Ca-



Casus 2. Ducta AF per centrum E,
 A | Ang. BEF duplus ang. BAF. | per ca-
 | Ang. CEF duplus ang. CAF | sum. I.

 Totus BEC duplus totius BAC.



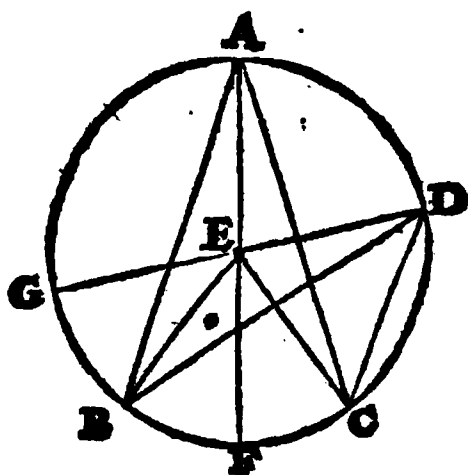
Casus 3. Totus Ang. GEC est
 duplus totius GDC.
 Partialis GEB est duplus par-
 tialis GDB.

 Remanet BEC duplus BDC. Q.E.D.
 PRO-

Theor.
19.

PROPOSITIO XXI.

In circulo, qui eidem arcui $\overset{\bullet}{BC}$ insistent anguli BAC . BDC , seu qui sunt in eodem segmento, sunt inter se æquales.



DEMONSTRATIO.

Angulus BEC est duplus BAC
 Atqui id. BEC est duplus BDC } 20. III.

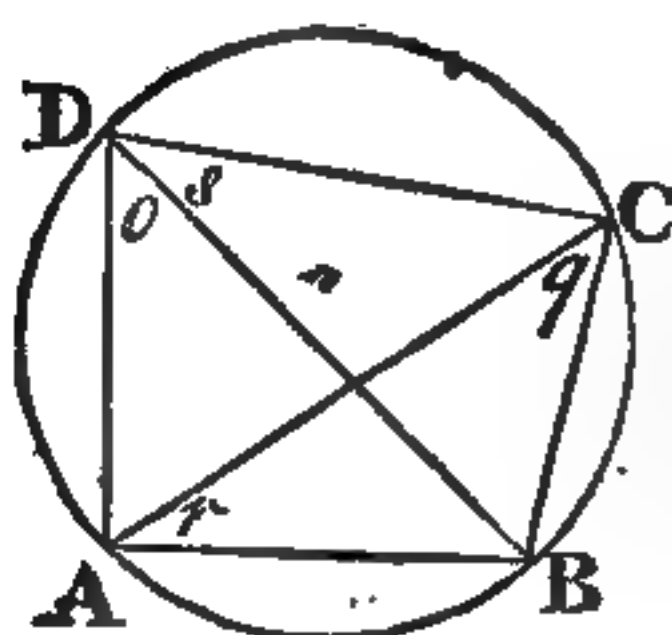
Ergo $BAC = \infty BDC$.

Ax. 7.

Pro

PROPOSITIO. XXII.

Theor.
20.



Quadrilateri
circulo
inscripti
ABCD
anguli op-
D. B. positi
duobus
rectis sunt
aequales.

DEMONSTRATIO.

Ductis diagonalibus AC. BD.

Ang. O \propto Q. ^a quia insistent arcui AB. a 21. III.
A { Ang. S \propto R. ^a quia insistent arcui CB

Totus angulus /
Angulus /

Duo anguli ADC. ABC \propto tribus
Q + R + ABC.

Atqui hi tres sunt \propto 2 Rectis.

Ergo & duo ADC + ABC
 \propto 2 Rectis. Q. E. D.

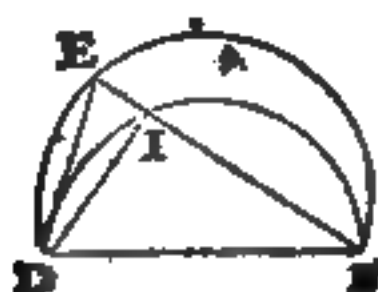
Kk

Pro-

Theor.
21.

PROPOSITIO. XXIII.

*Si super eadem recta DF constituta sint duo segmenta circulo-
rum inaequalia; illa non sunt si-
mila.*



I

O.

Si c
milia;

esse si-
DI.

a Def.
10. III.

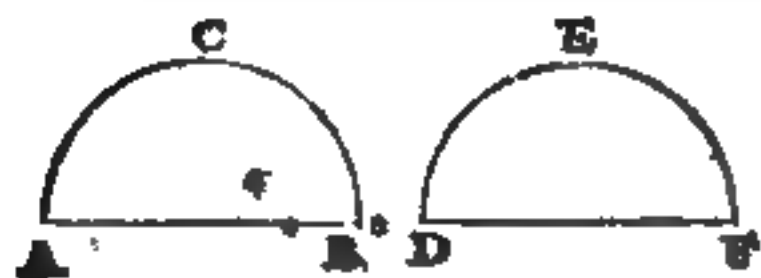
Ang. DEF > DIF juxta a Adversarium
Atqui DEF > DIF. per 16. I.

Quae duo sunt contradictoria.

Pro-

PROPOSITIO XXIV. Theor.
22.

*Segmenta similia ACB. DEF,
super equalibus rectis AB. DF
constituta, inter se sunt equalia.*



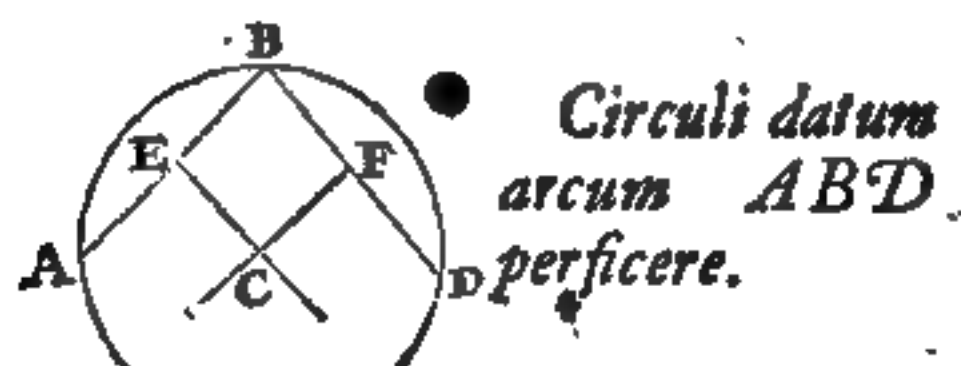
DEMONSTRATIO.

Superponatur AB ipsi DF, aut con-
gruent
Si n
Vel
riam I
Vel
tunc c
quam c

riphe-
DEF:
cribus
hujus.

Ergo congruent: adeoque sunt æqualia. Ax. 8.
Q. E. D.

Probl. 3. PROPOSITIO XXV.



CONSTRUCTIO.

1. Tria puncta ad libitum sumpta A. B. D. jungantur rectis AB. BD.
2. Dividantur bisariam per perpendiculares EC. FC.

Dico in illarum intersectionis puncto C esse arcus dati centrum quæsitum.

•
• Cor.
1. III.

C.

ionis;
e, &

circuli unicum tantum est centrum.

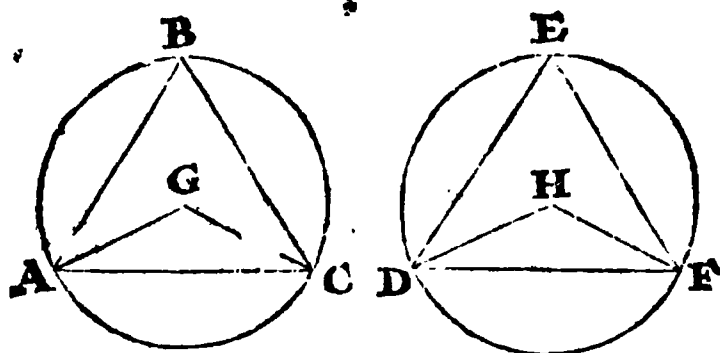
Adeoque ex centro C arcus perfici poterit. Q. E. F.

Pro-

PROPOSITIO XXVI.

Theor.
23.

*Si in circulis æqualibus anguli
sive ad centra. G. H, sive ad pe-
ripheriam B. E. sint æquales :
tunc etiam arcus AC. DF, qui-
bus insistant, erunt æquales.*



DEMONSTRATIO.

Ductis rectis AC. DF. in triangulis
AGC. DHF.

Latus AG \propto DH) Quia sunt radii cir-
Latus GC \propto HF culorum æqualium.
Angulus G \propto H. per propositionem.

Ergo Basis AC \propto DF.

a 4. l.

Fiant jam anguli B. E. ad periphe-
riam ductis AB. BC. DE. EF.

Kk 3

Quia

b Def. 10.
III.

Quia autem angulorum ad centra G.H æqualium semisses ad peripheriam B.E. etiam sunt æquales; segmenta ABC DEF erunt b similia: adeoque quia super æqualibus rectis sunt constituta, erunt æqualia: Quæ si a totis circulis æqualibus auferantur remanebunt arcus AC. DF inter se æquales.

Pars 2. Hæc eodem fere ratiocinio demonstratur.

Sed notandum in parte prima figuras debere considerari sine angulis ad peripheriam; qui in demonstratione demum construi debent.

Sic etiam in parte secunda spectari debent absque angulis ad centra, quos demonstratio demum requirit.

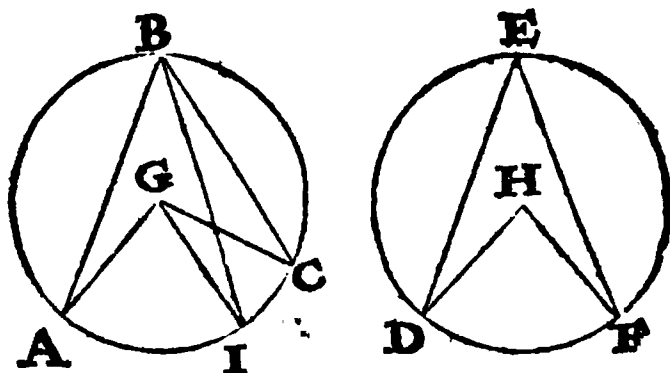
Adeoque utriusque partis demonstratione ambo anguli & ad centra & ad peripheriam exiguntur: cum per illos demonstretur æqualitas rectarum; per hos vero similitudo segmentorum; quæ utraque necessaria sunt.

PROPOSITIO XXVII.

Theor.

24.

Si in aequalibus circulis arcus AI. DF. sint aequales, anguli illis insistentes sive ad centra G. H. sive ad peripherias. B. E. sunt inter se aequales.



DEMONSTRATIO.

Pars I. Sinon sit angulus $G \propto H$.

Erit $G > H$.

Vel $G < H$.

Sit $G > H$. fiatque

Angulus $AGC \propto H$.

Ergo ^a Arcus $AC \propto DF$.

Atqui Arcus $AI \propto DF$ per proposit. ^{a 26. III.}

Ergo Arcus $AC \propto AI$. Totum & pars : quod est absurdum. Ergo angulus G non est minor H .

Eodem modo probatur angulum G non esse majorem angulo H .

Ergo sequitur G esse æqualem A .

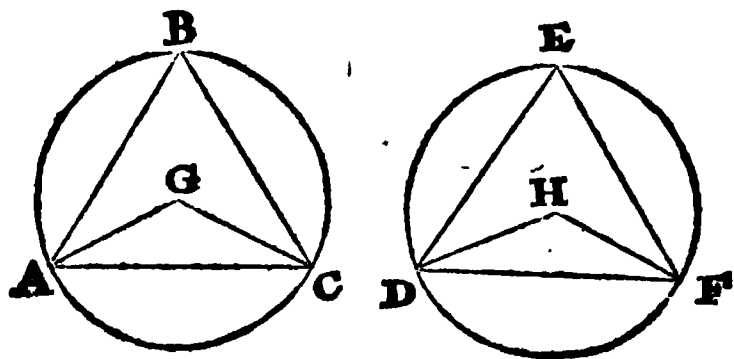
Pars 2. Hæc facile eadem formula demonstratur. Pro-

PROPOSITIO XXVIII.

Theor.

25.

Si in circulis æqualibus ductæ sint æquales rectæ AC. DF : erunt etiam, quos auferunt, arcus AC. DF inter se æquales.



DEMONSTRATIO.

Ductis rectis GA. GC : HD. HF, in triangulis AGC. DAF.

Latus AG \propto DH. Quia radii æqua-

Latus GC \propto HF. lium circulorum.

Basis AC \propto DF. per propositionem.

a 8. I.

b 26. III.

Ergo Ang. AGC \propto DHF.

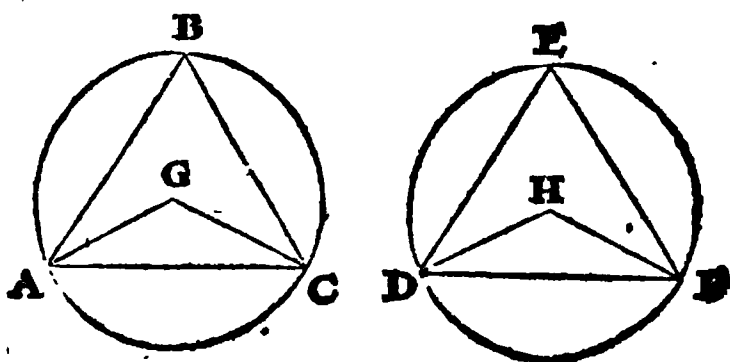
Adeoque arcus AC \propto DF.

Q. E. D.

PROPOSITIO XXIX.

Theor.
26.

*Si in æqualibus circulis arcus
AC. DF sint æquales; erunt &
subtendentes rectæ AC. DF inter
se æquales.*



DEMONSTRATIO.

Ductis GA. GC. HD. HF. erunt in
triangulis AGC. DHF.

Latus GA \propto HD Quia sunt radii æ-

Latus GC \propto HF qualium circulorum.

Angulus C \propto H. quia arcus AC po- a 27. III.
nitur æqualis DF.

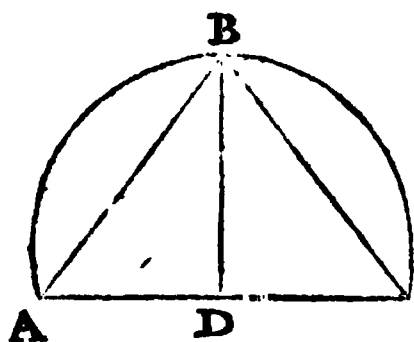
Ergo basis AC \propto DF.

b 4. I.

Q. D. E.

Probl. 4.

PROPOSITIO XXX.



*Datum cir-
culi arcum ABC
bifariam sec-
re.*

CONSTRUCTIO.

1. Ducatur recta AC, dati arcus ex-
tremities conjungens.
2. Illa per perpendicularem DB, bi-
secetur.

Dico Arcum bisectum esse in B.

DEMONSTRATIO.

Ductis rectis AB. CB. erunt in triangu-
lis BDA. BDC.

Latus BD utrique commune.

Latus AD \propto DC | Per con-
Angulus BDA \propto BDC. /struct.

a 4. I.
b 28. I.

Ergo Basis BA \propto a BC.

Adeoque Arcus BA \propto b BC.

Ergo Arcus ABC divisus est bifariam.

Q. E. D.

PRO-

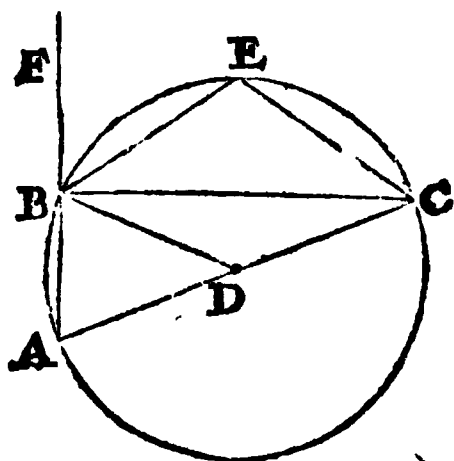
PROPOSITIO XXXI.

Theor.
27.

1. *Angulus ABC in semicirculo rectus est.*

2. *In segmento majori angulus BAC recto minor.*

3. *In segmento vero minori angulus BEC recto major.*



DEMONSTRATIO.

Pars I. Ducta DB, erunt duo trian-
gula DAB. DBC. Isoscelia, adeoque
anguli supra bases æquales.

a 5. I.

Ergo ang. DBA \propto DAB.
Et ang. DBC \propto DCB.) A.

Totus Ang. ABC \propto duobus BAC
+ BCA.

Atqui in triang. ABC omnes tres an-
guli sunt \propto b 2 Rectis.

L1 2

Er. b 32. I.

Ergo ab una parte angulus ABC est rectus, & ab altera duo reliqui BAC. BCA etiam æquales uni recto.

Pars 2. Per partem I duo anguli BAC BCA simul constituunt unum rectum: ergo solus BAC est minor recto.

Pars 3. In quadrilatero ABEC.

c 22. III. Duo anguli A \perp E ∞ c 2 Rectis.
Atqui ang. A $>$ uno recto per partem I.

Ergo ang. E $<$ uno recto.

SCHOLIUM I.

Si trianguli rectanguli hypotenusa dividatur bitariam, erit punctum bisectionis centrum circuli per triapuncta angularia transeuntis: adeoque examen normæ.

SCHOLIUM II.

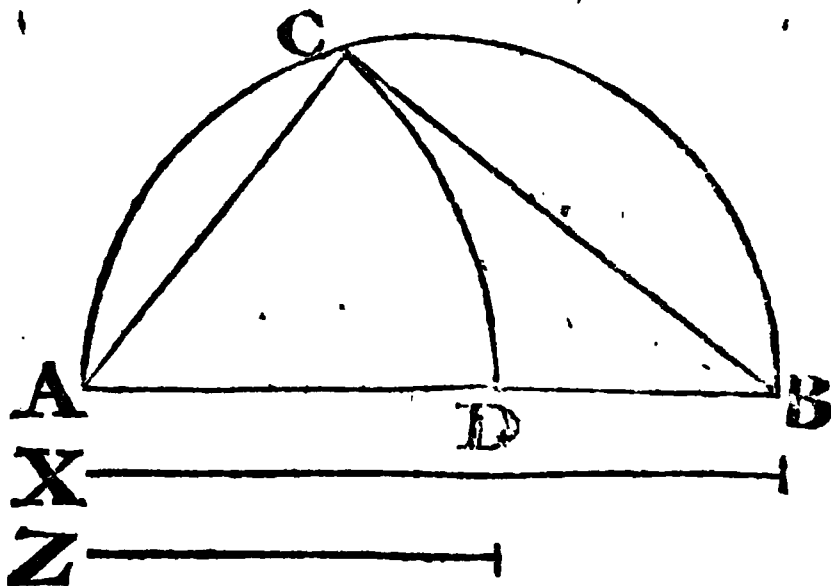
Ex hac propositione deducitur sequens

PROBLEMA.

Minus quadratum Z a majore X subtrahere, seu exhibere differentiam quadratorum X & Z.

Con.

LIBER TERTIUS. 269
CONSTRUCTION.



1- Super AB \propto X fiat Semicirculus ACB.

2. In Diametro AB sumatur AD \propto Z.

3. Centro A radio AD describe arcum DC. erit recta AC etiam \propto Z.

Dico ducta CB illius \square CB esse quæsitam differentiam quadratorum AB. AC.

DEMONSTRATIO.

Per propos. 31. III. angulus ACB est rectus, ergo in triangulo rectangulo ACB est

$$S \begin{cases} \square AB \propto \square AC + \square CB \text{ per 47. I.} \\ \square AC \quad \square AC, \end{cases}$$

$$\square AB + \square AC \propto \square CB.$$

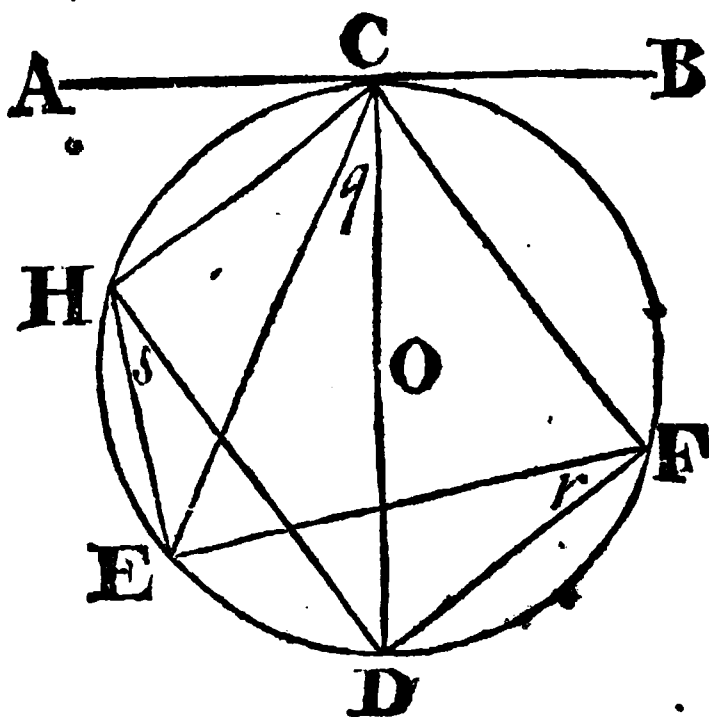
Ll 3

PRO-

Theor.
28.

PROPOSITIO XXXII.

Si recta linea AB circulum tangat in C, & a contactu ducatur alia circulum secans: erit angulus a tangente & secante factus æqualis angulo qui fit in alterno segmento.



DEMONSTRATIO.

Casus hic obtinent omnino duo:
Aut enim linea circulum secans ad tangentem est perpendicularis & transit per centrum O, ut CD.

Aut non transit: ut CE.

Ca-

CASUS I.

Demonstrari debet angulum $ACD \propto$
 CFD .

Ang. ACD est rectus : per hypoth.
 Ut & a CFD est rectus : quia est in Se- a 31. III.
 micirculo.

Ergo ang. $ACD \propto CFD$.

CASUS II.

Ab una parte probari debet esse ang.
 $ACE \propto CFE$.

S $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ang. } ACD \propto CFD. \text{ per casum I.} \\ \text{Ang. } Q \propto R. \text{ quia in eodem } b \text{ 21. III.} \\ \text{segmento.} \end{array} \right.$

Remanet ang. $ACE \propto CFE$.

Ab altera parte probari debet ang.
 $BCE \propto CHE$.

A $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ang. } BCD \propto CHD \text{ per casum I.} \\ \text{Ang. } Q \propto S. \text{ quia sunt eodem} \\ \text{segmento.} \end{array} \right.$

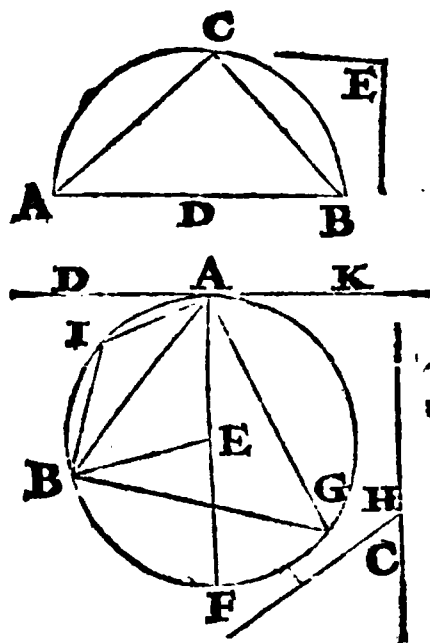
Totus ang. $BCE \propto$ Toti CHE .

Q. E. D.

Pro-

Probl. 5. PROPOSITIO XXXIII.

Super data recta AB segmentum circuli construere, quod capiat angulum dato angulo aequalem.



Est autem angulus datus vel rectus ut E, vel non rectus ut H, C.

CASUS I.

Constructio & Demonstratio.

231.III. Data AB bifariam divisa in D. Centro D radio DA fiat semicirculus ACB. hic capit a angulum rectum ACB, adeoque dato recto E æqualem.

Ca.

CASUS II.

CONSTRUCTIO.

1. Ad datæ BA punctum A ducatur DK, ut angulus DAB sit æquales ^{b 31. I.} angulo dato C.

2. Ex A duc perpendicularem AF.

3. Fiat angulus ABE æqualis angulo BAE.

4. Centro E, radio EA vel EB (quæ per 6. I. sunt æquales) describe circulum BIAG.

Dico segmentum AGB capere angulum dato acuto C æqualem.

Ut & segmentum AIB capere angulum data obtuso H æqualem.

Pars 1. Ang. DAB \propto AGB, in ^{c 32. III.} alterno segmento.

Et Ang. DAB \propto C per construct.

Ergo Ang. AGB \propto C,

Pars 2. In quadrilatero AIBG.

Duo anguli I \perp G \propto 2 Rectis. ^{d 22. III.}

Et duo anguli H \perp C \propto 2 Rectis.

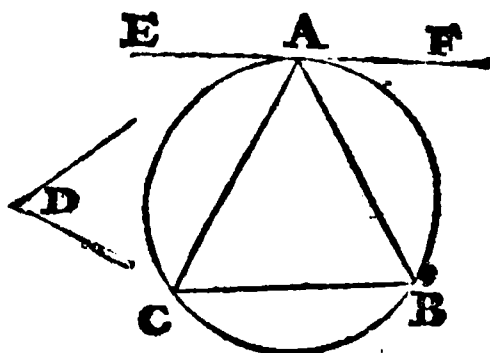
S { Ergo I \perp G \propto H \perp C.
Atqui G \propto C. per par- ^{c 32. III.}
tem I.

Ergo I \propto H.
Mm

Q. D. E.
Pro-

Probl. 6. PROPOSITIO XXXIV.

A dato circulo ABC segmentum CBA auferre, capiens angulum B , dato angulo D æqualem.



CONSTRUCTIO.

1. Ducatur recta tangens Circulum in A .
2. Ad A fiat angulus EAC æqualis angulo dato D .

Di-

Dico segmentum ABC
capere angulum æqualem D.

DEMONSTRATIO.

Ang. EAC \propto a ABC in al-^{a 31. III.}
terno segmento.

Atqui EAC \propto D per con-
structionem.

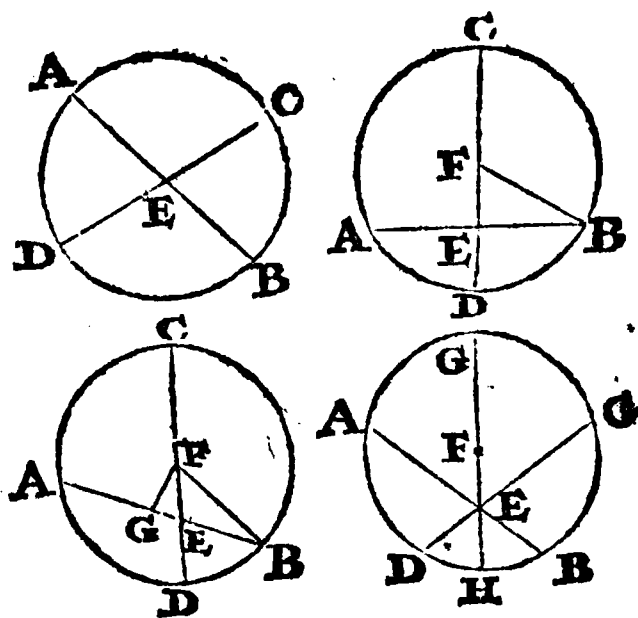
Ergo ABC \propto D.

Q. E. D.

PROPOSITIO XXXV.

Theor.
29.

Si in circulo dua rectæ AB. CD se mutuo in E secuerint: Rectangulum comprehensum sub segmentis unius AE. EB: aequale est ei quod sub segmentis alterius CE. ED. comprehenditur rectangulo.



Quatuor diversi ~~hic~~ occurrere possunt casus.

DEMONSTRATIO.

CASUS I.

Si rectæ AB. CD se mutuo secent in Centro: tum \square AEB erit \propto \square CED: quia quatuor illorum latera sint radii, adeoque inter se æqualia.

Ca-

CASUS II.

Si una CD per centrum F ducta alteram AB non per centrum transeuntem secet bifariam adeoque a perpendiculari- a 3. III
ter in E : ducatur FB .

DEMONSTRATIO.

$\square CED \perp \square FE \propto \square FD$ seu $\square FB$. b 3. III.
Atqui $\square FE \perp \square EB \propto \square FB$.

Ergo illis in hujus locum positis

$\square CED \perp \square FE \propto \square FE \perp \square EB$.
Adeoque dempto utrinque eodem $\square FE$.

$\square CED \propto \square EB$ hoc est $\square AEB$.

CASUS III.

Si recta CD per centrum F ducta altera non per centrum non dividit bifariam in E .

DEMONSTRATIO.

Ducta FG perpendiculari ad AB , ut
& FB tum erit.

$$\square CED \text{ --- } \square FE \propto \square FD \quad \text{hoc est } \square FB.$$

$$\square FG \text{ --- } \square GE \text{ 47. 1. } \quad \square FG \text{ --- } \square GB \text{ 47}$$

Sublato utimque $\square FG$. erit

$$\square CED \text{ --- } \square GE \propto \square GB$$

Sublato $\square GE$ $\square AEB \text{ --- } \square GE$. 5. II.

$$\square CED \propto \square AEB. \quad \text{Q. D. E.}$$

CASUS IV.

Si neutra transeat per centrum & se
mutuo secent utcunque.

DEMONSTRATIO.

Ducatur GH . transiens per centrum F
& per intersectionis punctum E . Tum.

$$\square AEB \propto \square GEH \text{ per ca-}$$

Et $\square CED \propto$ eidem $\square GEH$ sum 3.

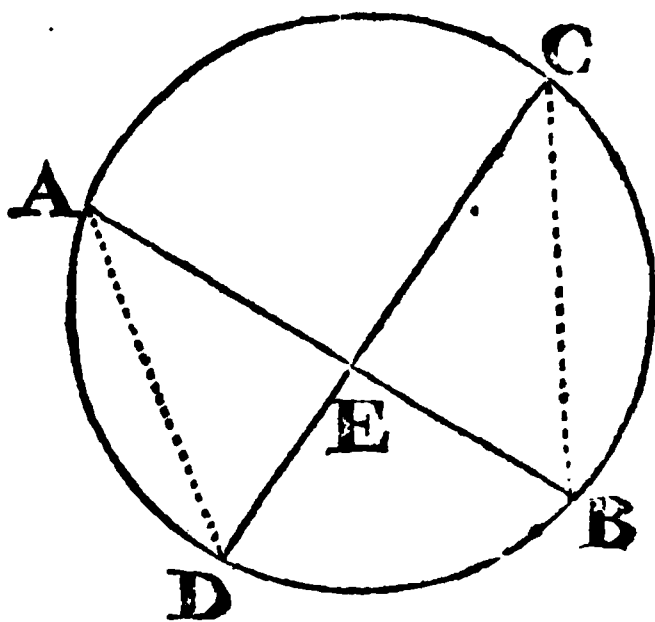
$$\text{Ergo } \square AEB \propto \square CED.$$

Q. E. D.

N O T A.

In casu 3. Illa quæ sibi invicem sub-
scribuntur inter se sunt æqualia & inferio-
ra loco superiorum legi debent, ac si in
una eadem linea essent substituta; id
quod etiam in plerisque aliis demonstra-
tionibus observandum.

Scho-



Suppositis Libri V. Definitione I. & prop. 4 & 16. (quæ cum hac propositione nihil habent commune) hæc unica demonstratio facillime omnibus casibus inservire potest.

DEMONSTRATIO.

Ductis AD. CB, erit in triangulis AED. CEB.

Angulus A \propto C
Ang. D \propto B ^{2^a} III.
Ang. AED \propto CEB. 15. I.

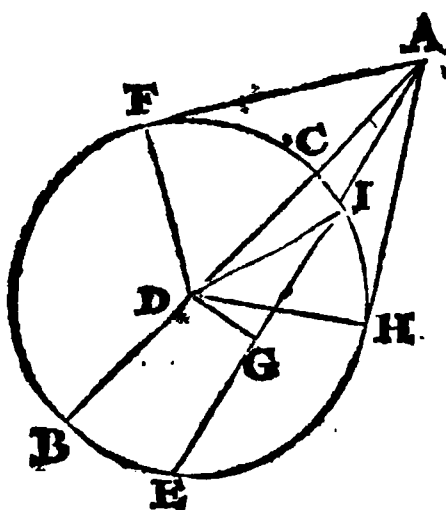
Ergo erit per 4. VI.

AE — ED \propto CE — EB.

Et per nostrum Theor. I. Lib. V.
vel 16. VI.

□ AE. ED \propto □ CE. EB. Q. D. E.
Pro.

PROPOSITIO XXXVI.

Theor.
39.

Si a puncto A extra circulum dato ducantur dua rectæ, una tangens AF, altera secans AB. Erit rectangulum BAC, sub tota secante BA & illius parte AC inter punctum A & circulum interjecta comprehensum, æquale quadrato tangentis AE.

Duo hic notandi sunt casus.

CASUS I.

Aut secans AB transit per centrum D.

DEMONSTRATIO.

Ducta DE, erit

$$\square BAC + \square DC = \square DA.$$

$$\square DC = \square DF. \text{ Quia sunt a radiis.}$$

$$\square DF + \square FA = \square DA. 47.1.$$

$$\square BAC = \square FA.$$

CASUS II.

Aut secans AE non transit per centrum.

De-

DEMONSTRATIO.

Ex centro D ducta perpendiculari
DG ut & DI : erit

$$\square EAI + \square GI \propto \square GA \\ \square DG \quad \square DG \quad A.$$

$$\square EAI + \square DG + \square GI \propto \square DG + \square GA.$$

$$47. I. \square DI \text{ seu } \square DF, \quad \square DA. 47. I.$$

Hoc est

$$\square FD + \square FA. 47. I.$$

$$\square EAI + \square DF \propto \square DF + \square FA.$$

Sublato utrinque $\square DF$.

$$\square EAI \propto \square FA.$$

Q. E. D.

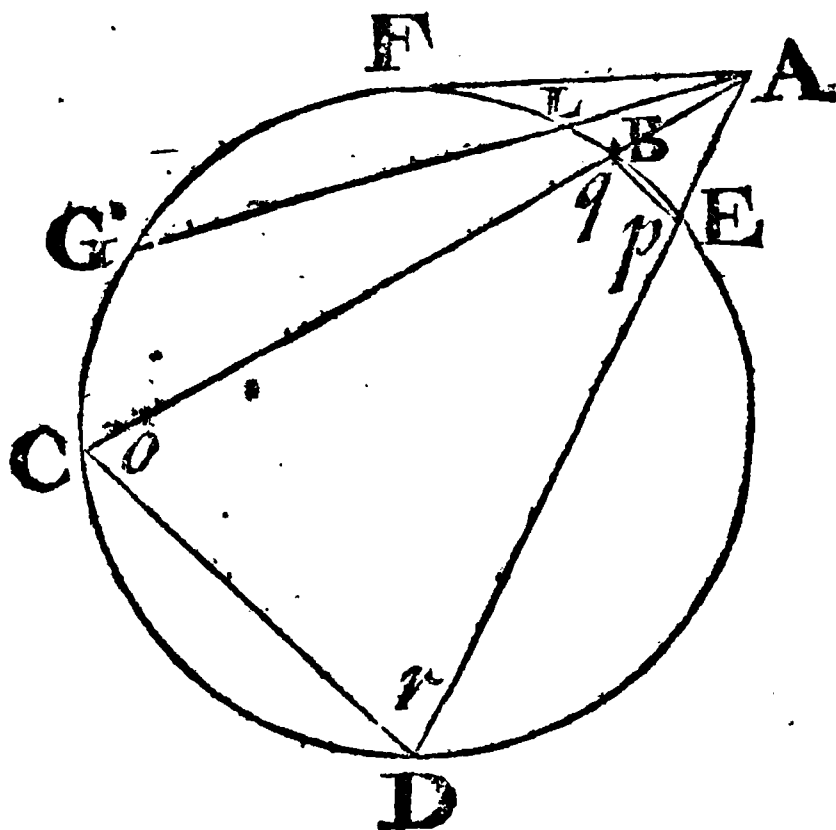
COROLLARIUM. I.

Si a puncto quovis extra circulum sum-
pto, plures rectæ circulum secantes du-
cantur, rectangula comprehensa sub to-
tis secantibus & partibus exterioribus,
inter se sunt æqualia.

• N a

Scho

EUCLIDIS SCHOLIUM I.



Suppositis iisdem quæ in Scholio præcedenti,
hanc damus Corollarii primi demonstrationem.

Demonstrandum est \square CAB esse æquale
 \square DAE.

DEMONSTRATIO.

Ductis CD & BE, erunt triangu^{la} CAD. EAB
inter se simili^a.

Nam anguli O — P \propto 2 Rectis 22, 111.

Et anguli AEB — P \propto 2 Rectis 13, 1.

Ergo O — P \propto AEB — P,

Et Sublato communi angulo P,

O \propto AEB.

Deinde ang. A utrinque est communis.

Ergo R \propto ABE, 32, 1.

Quare in triangulis CAD EA Berit per 4, VI.

CA — AD \propto EA — AB,

Et per 16, VI.

\square

SCHOLIUM II.

Si jam ex puncto A supra lineam AC ducatur ALG, eodem modo ductis GD LE probatur esse $\square GAL \propto \square DAE$; notandumque est puncta peripheriæ G. L. concavæ & convexæ propius ad se invicem accedere, quam puncta C. & B; quæ punctorum distantia adhuc magis immittitur si ex A supra lineam AG ducatur alia Circulum secans: donec tandem ducatur recta AF, quæ Circulum tangit in unico puncto F, in quo puncta peripheriæ concavæ & convexæ coincidunt, adeoque cum antea designatæ essent duæ lineæ AB AC feu AL AG. inter se inæquales; jam ex A ducitur solummodo unica linea AF. quæ ergo in superiori proportionem bis sumenda est sc: semel pro linea GA, & semel pro LA. quo facto proportio sic stabit $FA - AD = EA \mid AF$.

Ergo per 16. VI.

\square Tangentis AF $\propto \square DA. AE$.

Quæ æqualitas ipsius Propositionis 36 genuinum exhibet sensum, ut hinc pateat quam arcto nexu hæ veritates inter se cohæreant, quamque naturali una ex alia deducatur consequentiâ.

COROLLARIUM II.

Duæ rectæ ab eodem puncto ductæ, quæ circulum tangunt, inter se sunt æquales.

COROLLARIUM III.

Ab eodem puncto extra circulum sumto, duci tantum possunt duæ rectæ, quæ circulum tangunt.

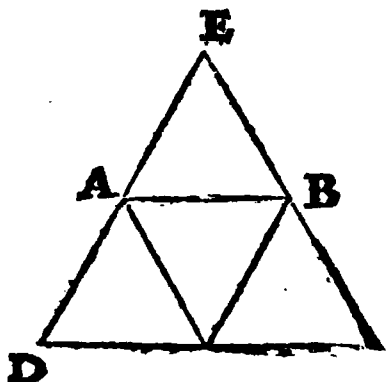
EUCLEDIS

ELEMENTORUM

LIBER QUARTUS.

DEFINITIONES.

1. *Figura rectilinea, in figura rectilinea inscribi dicitur, cum singuli ejus figurae, quae inscribitur, anguli, singula latera ejus cui inscribitur tangunt.*

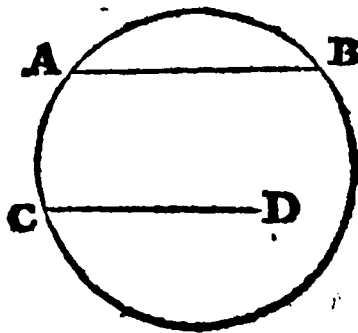


2. *Similiter & figura circum figuram describi dicitur, cum singula ejus, quae circumscribitur, latera singulos ejus figurae angulos tetigerint, circum quam illa describitur.*

3. *Fi-*

6. *Similiter & circulus in figura inscribi dicitur, cum circuli peripheria singula latera tangit ejus figuræ in qua inscribitur.*

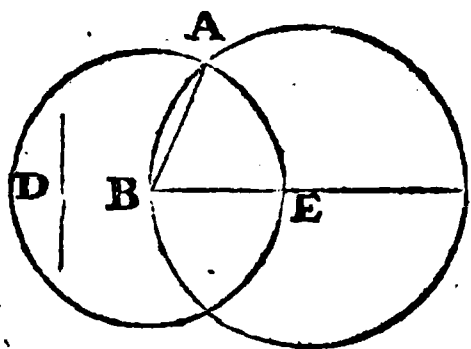
7. *Recta in circulo accommodari, seu coaptari dicitur, cum ejus extrema in circuli peripheria fuerint.*



Sic A B. dicitur in circulo accommodata non vero C D.

PROPOSITIO. I.

Probl. 1.



*In dato cir-
culo ABC ac-
commodare
rectam BA
equalem da-
ta rectæ D: quæ Circuli diame-
tro BC non sit major.*

CONSTRUCTIO.

1. In dato circulo duc Diametrum BC; cui si data recta D sit æqualis, pe-
tito satisfactum erit. Si vero minor.

2. Abscinde a BE \propto D; & centro B a 3. l.
radio BE describe arcum circuli EA.

Dico rectam BA esse æqualem D
& coaptatam in Circulo.

DEMONSTRATIO.

Linea D \propto BE per constructionem.

EA \propto BE quia radii.

Ergo linea D \propto BA, quæ est co-
aptata in circulo quia c utraque extremi-
tas terminatur in peripheria.

b Ax. 1.
c Def.
7. IV.

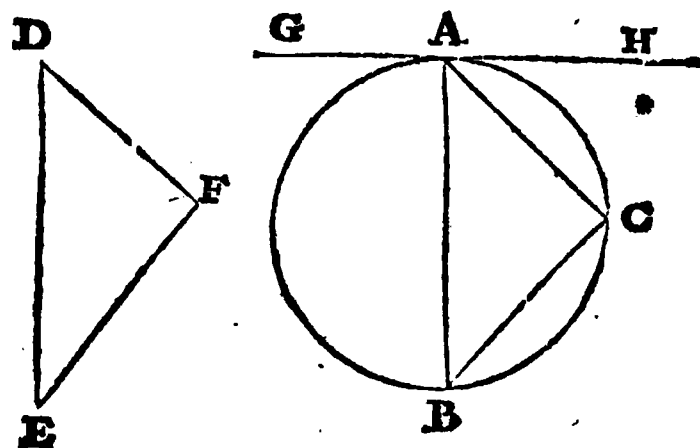
Qe

Pro-

Probl. 2.

PROPOSITIO II.

In dato circulo ABC triangulum ABC describere, quod dato triangulo DEF sit æquiangulum.



CONSTRUCTIO.

a 17. III. 1. Ad ductæ tangentis GH
b 23. I. punctum A^b constituatur angulus GAB. æqualis angulo F.

2. Ad idem punctum A ab altera parte fiat HAC æqualis angulo E.

• Jungatur recta BC.

Dico

Dico triangulum ABC ipsi
DEF esse æquiangulum.

DEMONSTRATIO.

In triangulis ACB. DEF.

A | Ang. C (c) \propto GAB \propto F per construct:
| Ang. B (c) \propto HAC \propto E per construct.

c 32. III.

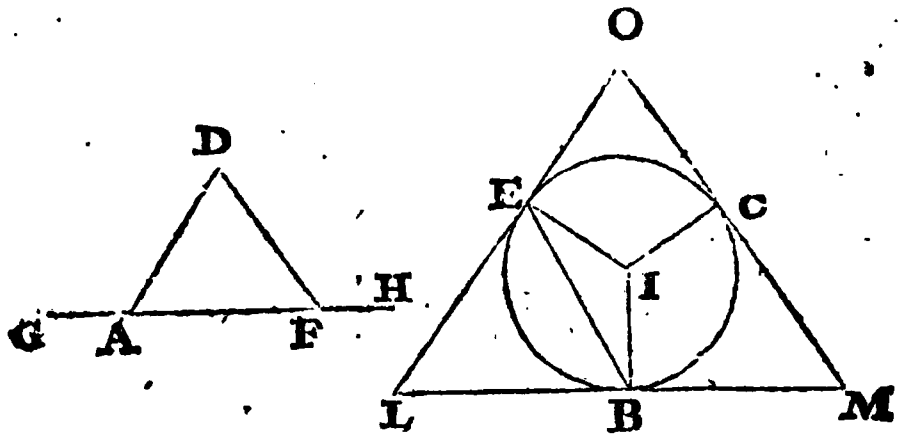
Duo anguli C \perp B \propto duobus
F \perp E.

Ergo etiam tertius ^d A \propto ter- ^{d 2 Cor.}
tio D. ^{32. I.}

PROPOSITIO III.

Probl. 3.

Circa datum circulum BCE triangulum LMO describere æquiangulum dato triangulo AFD.



CONSTRUCTIO.

1. Trianguli DAF latus AF producat in G & H.

a 23. I. 2. In circulo ducto radio IB, a fiat angulus BIE. æqualis trianguli externo angulo DAG.

3. Fiat angulus BIC æqualis externo DFH.

b 16. & 17. III. 4. Ad tria puncta B. C. E. ducantur tres b tangentes OL. OE. LM.

Dico ex illarum concursu oriri triangulum OLM. dato DAF æquiangulum.

DEMONSTRATIO.

Ex Scholio prop. 32. I. quadrilaterum BIEL, dividi potest in duo triangula, cum

au-

LIBER QUARTUS. 293

autem unum triangulum contineat duos
angulos rectos, duo continebunt qua-
tuor; adeoque quatuor anguli in quadri-
latero dicto erunt æquales quatuor rectis:

a quibus si demantur duo ^c recti LEI. ^c 16. III.
LBI. remanebunt.

Anguli BIE \perp L \propto 2 Rectis.

Atqui DAG \perp DAF \propto 2 Rectis.

Ergo BIE \perp L \propto DAG \perp DAE $\}^S$
Atqui BIE \propto DAG per const.

Remanet L \propto DAF.

Eodem modo demonstratur quod sit
angulus M \propto DFA, ergo tertius O erit
 \propto d tertio D. d 2 Cor.
31. I.

N O T A.

Quod autem tangentes EL & BL in
puncto L concurrere debeant sic patet.
Ducta BE.

Duo anguli toti LBI. LEI. \propto 2 R.

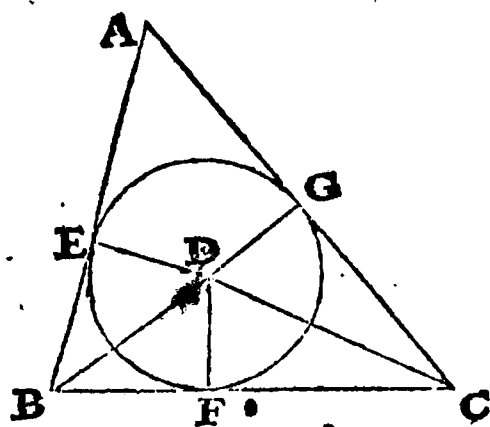
Ergo ang. partiales LEB. LBE $>$ 2 R.

^c Ergo rectæ EL. BL concurrent. c Ax. III

Probl. 4.

PROPOSITIO IV.

Dato triangulo ABC circulum inscribere.



CONSTRUCTIO.

1. Duos quoslibet angulos B. C. ^a divide bifariam per rectas BD. CD.

2. Ex puncto concursus D duc perpendiculares DE. DF. DG.

3. Centro D, radio DE. describe circulum.

Dico illum tangere omnia latera trianguli in punctis D. E. F. a-
deoque ipsi inscriptum esse.

De-

DEMONSTRATIO.

In triangulis DGC. DFC.

Ang. $G \propto F$. per constr.

Ang. DCG \propto DCF. quia totus
C bisectus est.

Latus DC commune.

Ergo latus DG ^b \propto DF.

b 26. I.

Eodem modo demonstratur ef-
se DF \propto DE.

Adeoque tres lineæ DE. DF.
DG sunt inter se æquales.

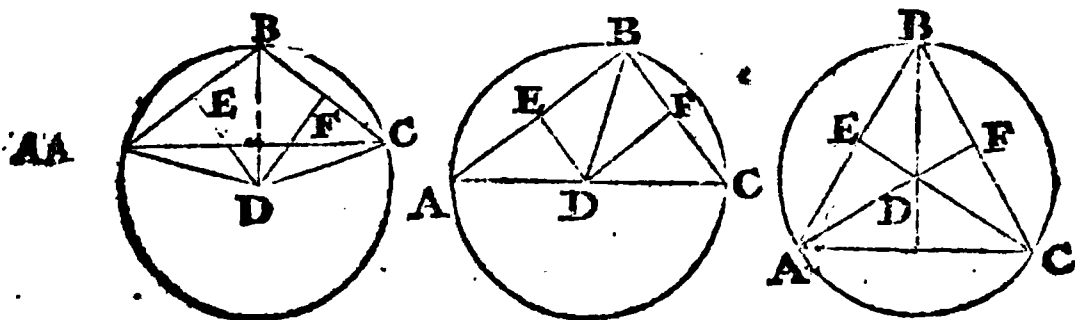
Ergo circulus centro D ductus
transit per puncta E. F. G. & tan-
git c omnia latera; quia anguli ^c 16. III.
ad E. F. G. sunt recti; adeoque
^d triangulo inscriptus est.

d Def. 6.

Probl. 5.

PROPOSITIO V.

*Circa datum triangulum ABC
circulum describere.*



CONSTRUCTIO.

1. Quælibetunque duo latera AB.
BC a divide bifariam in E. & F.
2. Ex E & F erige b perpendiculares
ED. FD.
3. Ex puncto concursus, describe
radio DA circulum.

Dico illum quoque transire per puncta
B, C. adeoque triangulo circumscriptum
esse.

DEMONSTRATIO.

Ductis DA DB DC. In triangulis
DEA. DEB.

Latus DE commune.

Latus EA \propto EB } Per con-

Angulus DEA \propto DEB /struct.

Ergo \therefore basis DA \propto DB.

c 4. I.

Eodem modo demonstratur esse DB \propto DC, adeoque tres lineæ DA. DB. DC sunt inter se æquales.

Ergo Circulus centro D, radio DA descriptus, transit per omnia trianguli puncta angularia: adeoque ipsi est circumscriptus. d

d Def. 4. IV.

Eadem constructionis formula obtinet in omnibus trianguli speciebus; cum hac solummodo differentia, quod in Rectangulo centrum cadat in punctum medium hypotenusæ.

In Acutangulo centrum cadat intra triangulum.

In obtusangulo vero extra.

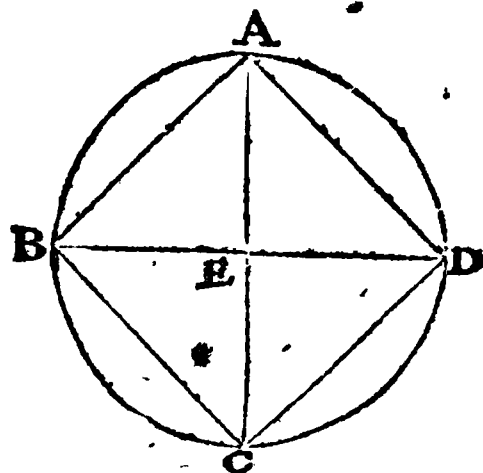
SCHOLIUM.

Ex hac propositione deducitur Methodus describendi circulum, per tria puncta non in linea recta disposita, transeuntem.

Probl. 6.

PROPOSITIO VI.

Dato Circulo quadratum inscribere.



CONSTRUCTIO.

1. Ducantur duæ Diametri AC BD in centro E se ad angulos rectos intersecantes.

2. Jungantur rectæ AB. BC. CD. DA.

Dico ABCD esse quadratum quæsitum.

DEMONSTRATIO.

Pro lateribus.

In triangulis AEB. AED.

Latus

Latus AE utrique commune.

Latus EB \propto ED. quia radii.

Angulus AEB \propto AED. quia uterque rectus.

Ergo basis AB \propto AD.

a 4. I.

Eodem modo probatur AD \propto DC : DC \propto CB. CB \propto BA.

Adeoque quatuor illa latera inter se erunt æqualia.

Pro angulis.

Quatuor anguli A. B. C. D. istis lateribus contenti sunt in Semicirculo. ergo recti. ^b

b 31. III.

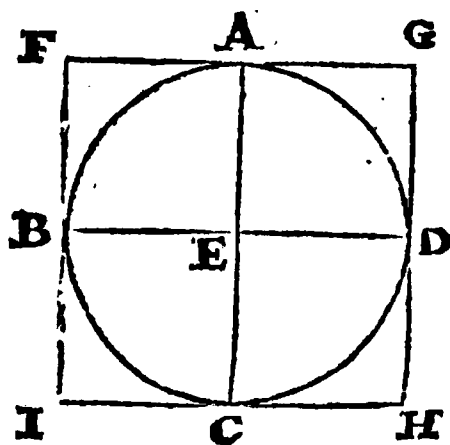
Adeoque ABCD est quadratum circulo inscriptum.

Q. E. F.

Probl. 7.

PROPOSITIO VII.

*Circa datum Circulum quadra-
tum describere.*



CONSTRUCTIO.

1. Ducantur duæ diametri AC . BD se mutuo ad angulos rectos in E secantes.

2. Per illarum extremitates ducantur tangentes FG . GH . HI . IF .

Dico illas coeuntes constituere Quadratum quæsitum $FGHI$.

De-

DEMONSTRATIO.

Pro angulis.

In quadrilatero AEBF.

4 Anguli A. E. B. F. \propto 4 Rectis
Atqui 3 Ang. A. E. B \propto 3 Rectis } S a 32. I.
& Scho-
lium.

Remanet ang. F \propto 1 Recto.

Simuli ratiocinio probatur an-
gulos G. H. I esse rectos.

Pro lateribus.

In parallelogrammis FD. ID.
latera FG. IH sunt æqualia Dia-
metro BD. adeoque & inter se.

In parallelogrammis IA. HA.
latera FI. GH sunt^b æqualia Dia-
metro AC. b 34. I.

Atqui Diametri AC. BD sunt
inter se æquales.

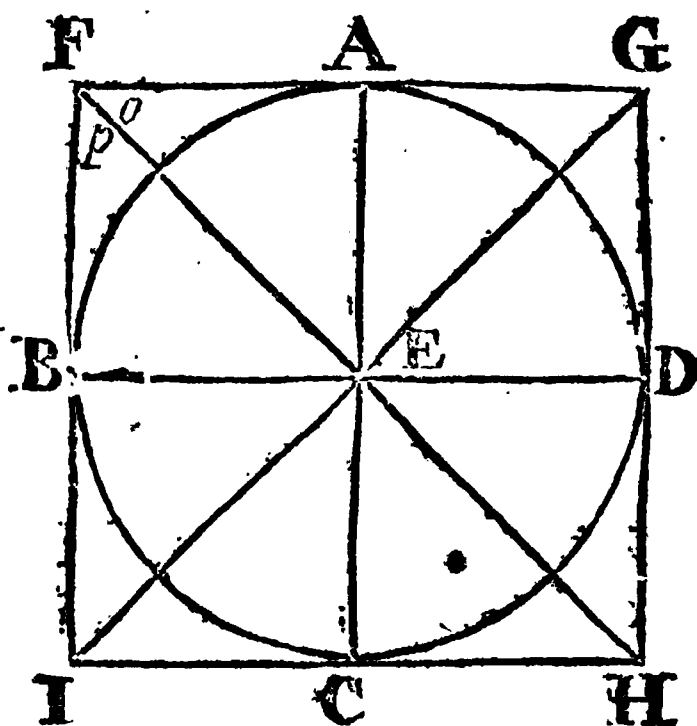
Ergo 4 latera FG. GH. HI.
IF sunt inter se æqualia.

Adeoque FGHI ~~est~~ quadra-
tum quælitum. Q. F. E.

PROPOSITIO VIII.

Probl. 8.

In dato quadrato Circulum describere.



CONSTRUCTIO.

1. Ducantur duæ diagonales FH. GI se interfecantes in E.
2. Ex E demittatur ad latus FI perpendicularis EB.
3. Centro E radio EB, describatur Circulus.

Dico illum tangere latera in punctis A. B. C. D. adeoque quadrato inscriptum esse.

De.

DEMONSTRATIO.

Ex E ductis perpendiculatibus EA.
ED. EC.

In triangulis FAE. FBE. erant.

Angulus A \propto B per constr. quia recti.

Angulus a O \propto P. quia semirecti.

a 2 Cor.

Latus FE utrique commune.

32. I.

Ergo Latus EA \propto EB. ^b

b 26. I.

Sic etiam probatur EB \propto EC: &
EC \propto ED: ut & ED \propto EA.

Ergo circulus centro E, radio EB
descriptus transibit per puncta A. D. C.:
& quia anguli ad illa puncta sunt recti,
tanget omnia iatera; adeoque circulus
quadrato erit inscriptus.

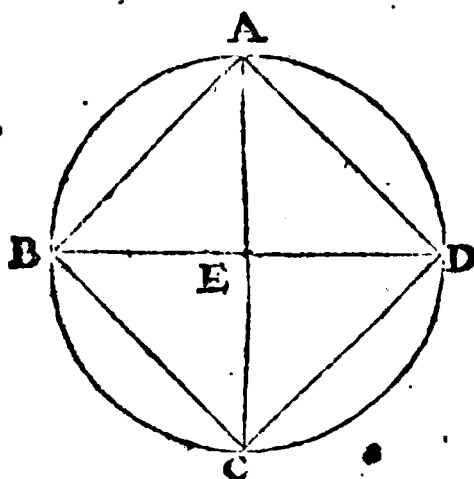
Q. E. D.

PRO-

Probl. 9.

PROPOSITIO IX.

*Circa datum quadratum circum-
lum describere.*



CONSTRUCTIO.

1. Ducantur diametri AC.
BD secantes sese in puncto E.
2. Centro E, radio EB, de-
scribatur Circulus.

*Dico illum transire per
omnia quadrati puncta
angularia; adeoque illi
esse circumscriptum.*

De-

DEMONSTRATIO.

Diametri $AC. BD$, quatuor
 angulos $A. B. C. D.$ ^a bifariam se- ^{a 2 Coro.}
 cant, Ergo in triangulo $EBA.$ ^{3 2. I.}

Angulus $EBA \propto EAB.$

Ergo latus EA ^b $\propto EB.$

Sic etiam probatur $EB \propto EC.$ ^{b 6. I.}
 & $EC \propto ED:$ & $ED \propto A.$

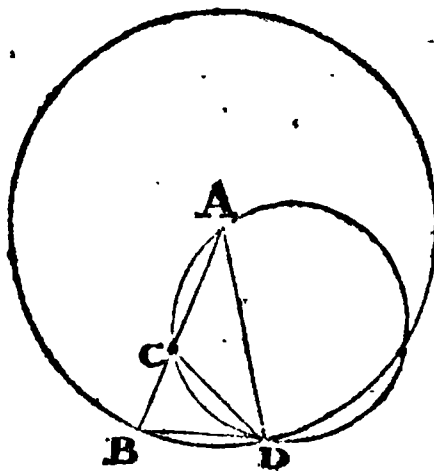
Adeoque quatuor lineæ $EA.$
 $EB. EC. ED.$ sunt inter se æqua-
 les.

Ergo circulus centro E radio
 EB descriptus transit per omnia
 quadrati puncta angularia $A. B.$
 $C. D.$ adeoque illi circumscri-
 ptus est.

Q. E. D.

PROPOSITIO. X.

Probl. 10.



*Triangulum Iso-
celes ABD construere,
cujus singuli ad basin
anguli B. & D dupli
sint reliqui ad verti-
cem A.*

CONSTRUCTIO.

1. Quamlibetunque lineam AB ita
11. II. divide in C, ut $\square ABC$ sit $\square AC$.

2. Centro A radio AB describe circu-
lum.

3. Ex B in isto circulo accommoda
1. IV. b rectam BD \propto AC.

4. Duc rectam AD.

Dico ABD esse triangulum quæsitum.

DEMONSTRATIO.

Ducta recta CD, circa triangulum
ACD describatur circulus ACD.

$\square ABC \propto \square AC$ hoc est $\square BD$ per
constr.

c37. III. Ergo BD tangit circulum^c: quem
BA, secat.

c32. III. A { Vnde ang. BDC \propto A in alterno seg.
Ang. CDA CDA.

A

Totalis ang. ADB (\propto ABD) \propto A
 \perp CDA.

Atqui etiam BCD \propto A \perp CDA. ^{d 32. I.}

Ergo

In triangulo BCD ang. BCD \propto CBD.

Adeoquē latus BD \propto CD.

^{e 6. I.}

Atqui latus BD \propto AC.

Ergo

In triangulo ACD latus CD \propto CA.

Adeoquē angulus A \propto CDA.

Ergo angulus BCD (qui duobus A & CDA est æqualis probatus) est duplus anguli A.

Ergo etiam BDC, qui angulo ABD demonstratus est æqualis, duplus erit anguli A.

Adeoquē & ADB, qui angulo ^f ABD est æqualis, ejusdem anguli A duplus erit. Q. E. F.

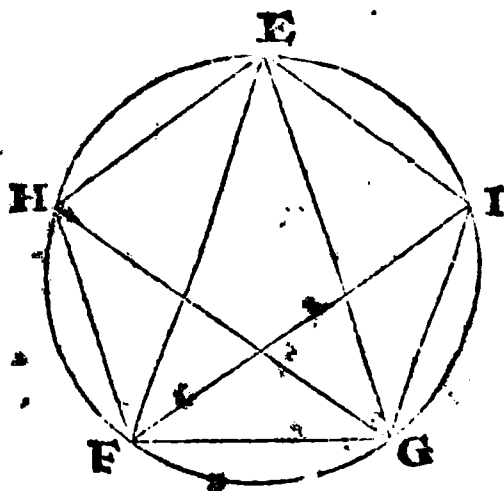
COROLLARIUM.

In triangulo Isoscele hoc modo constructo, angulus ad basin valet duas partes quintas seu $\frac{2}{5}$ duorum vel $\frac{4}{5}$ unius Recti: quare angulus A valebit $\frac{1}{5}$ duorum vel $\frac{2}{5}$ unius Recti.

PROPOSITIO XI.

Theor.
II.

Dato circulo Pentagonum æquilaterum & æquiangulum inscribere.



CONSTRUCTIO.

1. Cuilibet cunque triangulo Isosceli juxta præcedentem propositionem constituto, æquiangulum inscribatur EFG in circulo dato.
 2. Illius supra basin anguli EFG. EGF bisecentur per rectas FH, GH.
 3. Puncta E. H. F. G. I. jungantur totidem rectis.
- Dico factum esse quod petitur.

De-

DEMONSTRATIO.

Pro lateribus

Quinque anguli EFI . IFG . EGH .
 HGF . FEG sunt inter se æquales per
 constructionem.

Ergo \hat{a} arcus quibus insistant sunt æ. a. 26. III.
 quales.

Ergo illis \hat{b} subtensæ rectæ, quæ sunt b. 29. III.
 Pentagoni latera, sunt æquales.

Pro angulis.

Arcus HFGI ∞ Arcus FGIE . per
 partem 1.

Ergo Angulus E ∞ Angulo H . quia c. 27. III.
 æqualibus arcibus insistant.

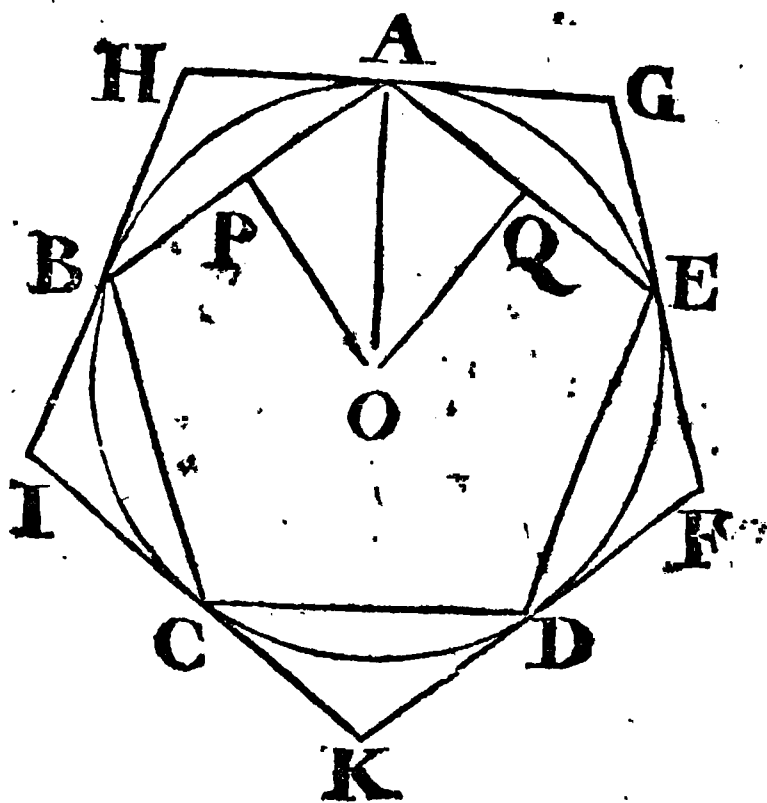
Simili modo de duobus aliis angulis
 &c. Q. E. F.

PROPOSITIO XII.

Theor.

12.

Circa datum circulum Pentagonum æquilaterum & æquiangulum describere.



CONSTRUCTIO.

1. Inscribatur Pentagonum regulare per præced^{er} ABCDE.

2. Ad puncta A. B. C. D. E. ducantur totidem tangentes, quæ concurrunt in punctis F. G. H. I. K.

Dico factum quod queritur.

De-

DEMONSTRATIO.

Pro lateribus.

Ex centro O ductis perpendicularibus
OP. OQ, ut & radio OA in triangulis
OAP. OAQ.

Latus OP ^a ∞ OQ. quia æquales ^a 14. III.
AB. AE æquidistant a centro.

Latus PA ^b ∞ QA. quia æquales ^b 3. III.
AB. AC bisectæ sunt.

Latus OA utrique communes.

Ergo ang. ^c OAP ∞ OAQ. Qui si aufe- ^c 8. I.
rantur ab æqualibus Rectis angulis OAH
OAG : remanebit angulus HAB ∞
GAE.

Deinde Triangula BHA. EGA. sunt
Isoſceſia, quia ex puncto H ductæ sunt
ductæ tangentes HA. AB; ut ex puncto ^d 2 Co-
G duæ GA. GE : quæ sunt ^d æquales : ^{rol. 36.}
III.

Quare illa triangula habent bases AB.
AE æquales, & angulos ad basin HBA.
HAB. æquales GAE. GEA. non solum
alterum alteri, sed promiscue omnes ^e 5 &
quatuor inter se æquales. Adeoque ^e qua- ^{16. I.}
tuor latera BH. HA. AG. GE. sunt in-
ter se æqualia.

Si-

Simili modo demonstratur omnes decem lineolas esse inter se æquales.

Si jam una fit æqualis uni etiam duæ erunt duabus æquales.

Adeoque quinque latera, quæ ex duabus lineolis constant, erunt æqualia.

Pro angulis.

Ex demonstratis patet triangula AHB
f 8. I. AGE habere omnia latera æqualia.
Adeoque angulum H^f ∞ G. Et eodem modo de reliquis.

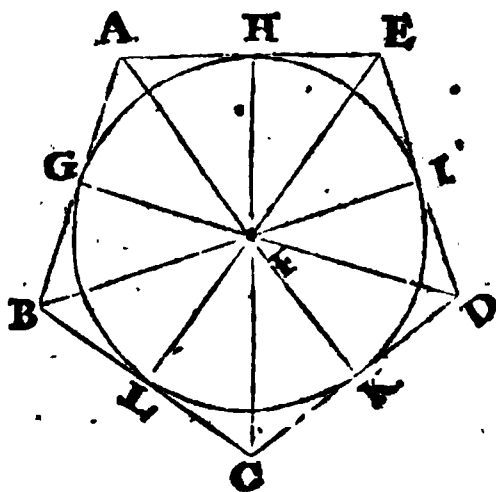
COROLLARIUM.

Si in circulo quælibet cunque figura regularis fuerit inscripta, lineæ tangentes circulum in punctis illius angularibus, suo concursu semper constituent figuram similem circulo circumscriptam.

PROPOSITIO XIII.

Prob. 13.

Dato Pentagono regulari circulum inscribere.



CONSTRUCTIO.

1. Quoslibet duos angulos A & E divide bifariam per rectas AF. EF.

2. Ex illarum puncto concursus F, ducantur ad omnia latera perpendicularares.

3. Ex F tanquam centro pro radio assumpta una ex istis perpendicularibus describatur circulus.

Dico illum Pentagono fore inscriptum.

Rr

De-

DEMONSTRATIO.

In Triangulis AGF. AHF.

Angulus GAF \propto HAF Per con-
 Angulus AGF \propto AHF /struct.
 Latus AF utrique commune.

a 26. I.

Ergo a latus GF \propto HF.

Eodem modo probatur HF \propto IF.
 IF \propto KF. KF \propto LF & denique LF
 \propto GF.

Adeoque omnes istæ perpendiculares
 erunt inter se æquales.

Quare circulus radio FH descriptus
 transibit quoque per puncta I. K. L. G.
 b 16. III. in quibus ista latera tanget; quia anguli
 ad ista puncta sunt recti.

Q. E. D.

COROLLARIUM. I.

In quolibet polygono regula-
 ri

ti omnes lineæ bisecantes angulos in uno eodemque puncto conveniunt.

COROLLARIUM II.

In omni Polygono laterum imparem habente numerum linea aliquem ex angulis bisecans oppositum etiam bisecabit latus.

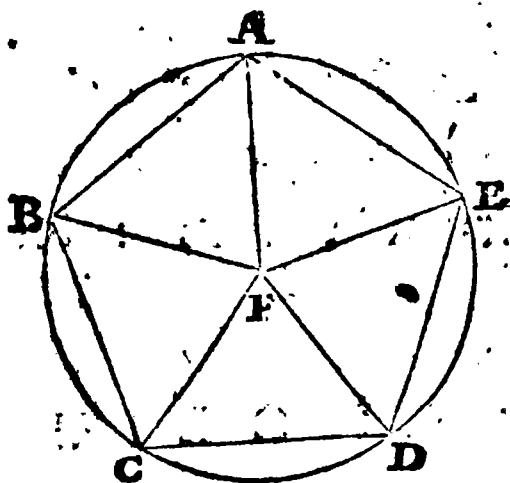
S. C H O L I U M.

Eadem methodo in quacunque figura regulari circulus describi potest.

Probl. 14.

PROPOSITIO XIV.

Circa datum Pentagonum regulare circulum describere.



CONSTRUCTIO.

1. Duos quoslibet angulos A & B divide bifariam per rectas
 a. Ax. II. AF , BF , quæ concurrent in F .

2. Centro F , radio AF , vel BF describe circulum.

Dico illum transiturum per reliqua puncta angularia.

De-

DEMONSTRATIO.

In triangulo FAB .

Ang. $FAB \propto FBA$. quia illorum dupli sunt æquales.

Ergo latus $FA \propto FB$.

Eodem modo bisecto, angulo C demonstrabitur $FB \propto FC$. & sic per orbem omnes lineæ biscentes angulos erunt æquales.

Ergo circulus transibit per omnia puncta angularia, adeoque pentagono circumscriptus erit.

Q. E. E.

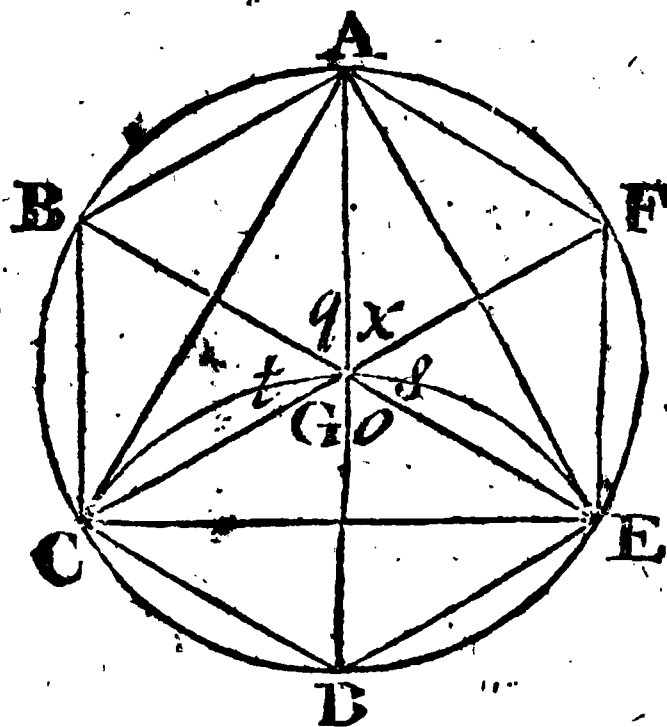
SCHOLIUM.

Eadem constructionis forma circa quamlibet figuram regularem circulum describere licet.

Probl. 15.

PROPOSITIO XV.

*In dato circulo Hexagonum
regulare describere.*



CONSTRUCTIO.

1. Centro quolibet puncto D, radio circuli DG, describe arcum CGE.
2. Ex punctis C. D. E. per centrum G describe tres diametros CF. DA. EB.
3. Duc sex rectas AB. BC. CD. DE. EF. FA.

Dico ABCDEF esse hexagonum
quæsitum. De-

DEMONSTRATIO.

Pro lateribus.

Lineæ DC. DE singulæ sunt ∞ ;
Radio DG.

Lineæ GC. GE. GD singuli sunt Radii.

Ergo quinque lineæ GC. GD. GE.
DC. DE sunt æquales.

Adeoque Triangula GCD. GDE
sunt æquilatera.

Ergo duo anguli G & O singuli sunt
una tertia pars duorum rectorum. a 3 Cor.

Atqui tres anguli G. O. S. simul ^{b 13. I.} va-
lent duos rectoros, seu tres tertias duorum
rectorum.

Ergo tertius S. etiam est una tertia
duorum rectorum.

Adeoque tres G. O. S. sunt inter se
æquales.

Atqui illis æquales sunt tres ^{c 15. I.} opposi-
ti X. Q. T.

Ergo sex anguli ad Centrum sunt æquales.

Ergo ^{d 26. III.} sex arcus, quibus insistant,
sunt æquales.

Adeo-

329. III. Adeoque ^e sex subtensa, quæ consti-
tuunt latera figuræ, inter se sunt æqua-
les.

Pro angulis.

Hos esse æquales facile patet, quia
f21. III. ^f singuli insistant æqualibus arcubus, sc.
quatuor sextis partibus totius peripheriæ:
Ergo sunt inter se æquales.

COROLLARIUM.

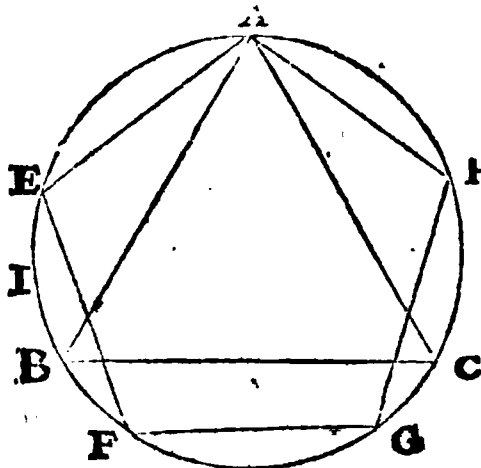
Hexagoni latus æquale est radio.

SCHOLIUM.

Ductis tribus rectis AC. AE. CE.
circulo inscriptum erit triangulum æqui-
laterum.

LIBER QUARTUS. 321
PROPOSITIO XVI.

Probl. 16.



*In dato Cir-
culo Quindeca-
gonum regulare
describere.*

CONSTRUCTIO.

1. Circulo (a) inscribe pentagonum regulare a i. IV.
AEFGH.

2. Itidem (b) triangulum regulare ABC.

Dico rectam BF, fore latus quindecago-
ni quæsit.

b Schol.
15. IV.

DEMONSTRATIO.

Pentagonum dividit totam peripheriam in
quinque partes æquales; quare quælibet conti-
net unam quintam seu tres decimas quintas to-
tius peripheriæ: adeoque duæ AE. EF, sex deci-
mas quintas continebunt.

Triangulum vero dividit totam peripheriam in
tres partes æquales; quarum quælibet ut AB con-
tinet unam tertiam, seu quinque decimas quin-
tas totius peripheriæ. Tum

Arcus AEF sex decimæ quintæ.

Arcus AEB quinque decimæ quintæ. *Q. E. D.*

Arcus BF una decima quinta.

Ergo sit ducatur recta BF, eique æquales qua-
tuordecim in circulo coaptentur, descriptum erit
quindecagonum, æquilaterum, cum omnes ar-
cus sint æquales.

FINIS LIBRI QUARTI.

Sf

Pro-

EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER QUINTUS.

DEFINITIONES.

1. *Pars est magnitudo magnitudinis, minor majoris, cum metitur majorem.*

Cum totum sit sua parte majus, patet partem contineri in suo toto. Hoc autem duplici modo fit.

Vel continetur ita ut aliquoties sumpta, præcise reddat suum totum seu ipsi æqualis sit; quemadmodum numerus quatuor seu 4, est minor toto 12, adeoque in illo continetur, & quidem ita, ut aliquot vicibus, scilicet tribus sumtus, accurate æqualis sit toti 12. Et inde hæc pars Mathematicis dicitur Aliquota, quæ suum totum absque residuo dividit, id quod idem est ac metiri: & hanc Partis speciem Euclides solummodo respexit, altera, quæ sequitur, neglecta.

Vel pars ita continetur in suo toto, ut aliquoties sumpta totum vel excedat vel ab illo

illo deficiat, adeoque non accurate ipsi æqualis sit. Quemadmodum numerus 4, cum minor sit toto 14, in illo continebitur; sed quia ter sumtus toto minor est ac quater toto major, hæc pars non potest dici Aliquota, ut altera pars notata: quia tamen aliquam exhibet quantitatem totius quantitatis, vocatur pars Aliquanta.

Cæterum cum Euclides adhibuerit Magnitudinis vocabulum, suspicari licet illum meminisse solunquantitatis continuæ, quæ vulgo magnitudinis nomine Mathematicis venit; minime tamen excludenda est quantitas discreta & in numeris posita, quæ suas etiam habet partes: quibus illa omnia, quæ de rationibus & proportionibus toto hoc libro demonstrat, æque facile imo pro captu nostro facilius accommodari possunt.

Quare & nos cum multis aliis omnes hujus libri propositiones, neglectis lineis demonstrabimus in numeris; tum quia illis magis sumus assueti & de illis sæpius quam de lineis cogitavimus; tum etiam quia illa quæ de numeris probantur, si cui libet, ipsis lineis applicari possunt.

2. *Multiplex autem est major quantitas quam metitur minor.*

Quemadmodum pars suum totum dividit seu metitur absque residuo vel cum residuo; ita reciproce etiam totum a sua parte dividitur vel sine vel cum residuo. Prius illud totum idem est quod multiplex, cujus in hac definitione fit mentio, non intellecto altero. quod cum residuo dividitur, quodque adeo multiplex dici non meretur.

3. *Ratio est duarum quantitatum ejusdem generis, mutua quædam secundum communem mensuram habitudo.*

Cum proprie loquendo una eademque res ad se ipsam non possit comparari secundum quantitatem, quia se ipsa non est major nec minor, patet plures requiri inter quas legitima instituatur comparatio; quæ etiam tantum possunt esse duæ.

Illæ autem necessario requiruntur ut sint res homogeneæ; ut quantitates ejusdem generis; quales sunt linea cum linea
com-

comparata; superficies cum superficie; corpus cum corpore: nullo ergo modo linea comparari potest cum superficie vel cum corpore, nec superficies cum corpore quia non sunt ejusdem generis.

Porro ulteriorem hujus homogeneitatis explicationem tradit Euclides in definitione 5.

Hæc autem intelligenda est in quantitatibus secundum magnitudinem, seu partium æqualium numerum, adeo ut una res altera sit vel major vel minor; hoc est ut una res plures vel pauciores similes seu æquales contineat partes quam altera.

Ex quibus patet rationem nihil aliud esse quam modum seu formulam continendi; qua una quantitas aliam quantitatem continet, vel in illa continetur; quæ capacitas cum per nullam aliam operationem quam per divisionem innotescat, liquet rationem seu comparisonem duarum quantitatum non clarius quam per fractionis formam posse exprimi.

Exempli gratia; ponantur duo numeri 16 & 4. qui saltem aliquam inter se habent rationem, quia numerus 16 major est numero 4, adeoque numerum 4 in

Sf 3

sc

se continet. Ut jam ulterius ista ratio examinetur videndum est quoties 16 continet 4, quod per divisionem innotescit; quia autem ~~facta~~ divisione acquiritur 4 pro quotiente pronuntiamus rationem 16 ad 4, esse quadruplam. hoc est 16 esse quadruplum numeri 4: vel 16 se habere ad 4 ut 4 ad 1: Id quod etiam commode hoc modo exprimitur per fractionem $\frac{16}{4}$ quæ innuit 16 per 4 esse dividendum vel jam supponit divisum.

Si jam sumantur duo alii numeri ex. gr. 8 & 2, & eorum rationem examinando comperiatur numerum 8 minorem 2 etiam quater in se continere, quia per divisionem idem quotiens 4 obtinetur; quæ per modum fractionis exposita sic stabit $\frac{8}{2}$.

Inde patebit rationem quæ intercedit inter 16 & 4, esse eandem, vel similem vel æqualem rationi quæ est inter 8 & 2: quia nimirum 16 toties continet 4; quoties 8 continet 2.

Porro hinc fit manifestum æquimultiplicem esse nihil aliud significare quam habere eandem rationem: ut si dicatur 16 esse æquemultiplicem numeri 4, ac
8 est

8 est numeri 2, idem est ac si dicatur numerum 16 ad 4 habere eandem rationem, quam habet 8 ad numerum 2; cum utriusque sc. & æquæ multiplicitas & ejusdem rationis idem quotiens 4 per ejusdem divisionis acquiritur operationem: quare ejusdem rationis notationem hoc modo exprimere licet $\frac{16}{4} \propto \frac{8}{2}$.

Quæ fractiones, ut iterum in aliam rationum formam reducantur, dicimus 16 esse ad 4 quemadmodum 8 est ad 4; vel secundum nostram quantumur scriptiōis methodum $16 \div 4 = 8 \quad 1 \quad 2$.

Duorum autem cujuslibet rationis terminorum ille qui ad alterum refertur Antecedens dicitur; ad quem vero fit relatio Consequens rationis dicitur. Ut in ratione 16 ad 4 terminus Antecedens est numerus 16; consequens vero 4: quemadmodum ab altera parte, in ratione 4 ad 16, numerus 4 Antecedentis, 16 vero consequentis acquirit nomen.

Rationes autem non uno dividuntur modo: nos duas afferemus præcipuas.

I. Ratio dividitur in, rationalem & irrationalem.

Rationalis est quæ veris numeris potest exprimi ut 6 ad 3: quæ est eadem

dem cum 2 ad 1. quæ dicitur dupla.

Irrationalis vero est quæ veris numeris exprimi nequit, ut in quadrato ratio lateris ad Diagonalem; quæ, licet aliquo modo exprimatur per numeros qui Surdi dicuntur, scilicet ut 1 ad $\sqrt{2}$, cum tamen $\sqrt{2}$ non sit verus numerus, sed tantum imaginarii cujusdam numeri nota veris tamen numeris explicabilis non est.

II. Ratio dividitur in rationem æqualitatis vel inæqualitatis.

Ratio æqualitatis, est quando duo ad se comparata sunt æqualia: ut 4 ad 4: & 2 ad 2.

Inæqualitatis est, cum termini inter se comparati inæquales sint, ut 4 ad 3 & 2 ad 6.

Hæc autem iterum est.

Majoris inæqualitatis, cum terminus antecedens major est consequente: ut 4 ad 3, & 6 ad 2.

Minoris inæqualitatis, cum antecedens est minor suo consequente, ut 2 ad 6. & 4 ad 12.

Proportio est rationum similitudo.

Quem-

Quemadmodum in omni ratione requiruntur duo termini seu duæ quantitates, ita in omni proportionem requiruntur duæ rationes, cum una eademque ratio ad se ipsam proprie comparari nequeat.

Cum ergo duarum rationum una ita sit constituta, ut illius terminus antecedens suum consequentem toties contineat, vel in illo contineatur sive absolute & sine residuo sive cum annexa fractione, quoties alterius antecedens suum consequentem continet vel in illo continetur, vel sine vel cum fractione quæ præcedenti æqualis est, duæ istæ rationes constituent Proportionem.

Ex: Gr: quia numerorum 12 & 4, Antecedens 12 suum consequentem 4 toties (scilicet ter) continet quoties numerorum 9 & 3, antecedens 9 suum consequentem 3, videlicet etiam ter, duæ istæ rationes 12 ad 4 & 9 ad 3 erunt inter se similes seu æquales seu potius eadem scilicet triplæ; & hæc similitudo apud Mathematicos vocatur Proportio.

Est autem proportio triplex, Arithmetica, Geometrica, & Musica.

I. Proportio Arithmetica est æqualitas excessuum vel differentiarum inter tres,

T t qua-

quatuor vel plures numeros; in qua notandum est quemlibet numerum posse recipi pro differentia.

Ut 1. 2. 3. 4. 5. 6. In quibus unitas est differentia.

Vel 1. 3. 5. 7. 9. 11. Qui binario se invicem excedunt.

Vel 1. 4. 7. 10. 13. 16. Qui ternario. Et sic in infinitum.

II. Proportio Geometrica est rationum similitudo inter tres, quatuor vel plures quantitates, seu numeros. Potest autem & hic quilibet numerus pro denominatore rationis assumi excepta unitate.

Ut 1. 2. 4. 8. 16. Qui sunt in ratione dypla adeoque 2 est rationis denominator.

Vel 1. 3. 9. 27. 81. Qui cum sint in ratione tripla numerum 3 pro denominatore habent.

Proportio Musica est qua tres quantitates ita ordinatæ sunt, ut eadem sit ratio primæ ad tertiam, quæ differentia inter primam & secundam ad differentiam inter secundam & tertiam. In qua proportionem sunt tres numeri 6. 8. 12. cum eadem sit ratio primi numeri 6. ad
ter-

tium 12, quæ est numeri 2 (excessus primi) ad numerum 4. (excessum secundum.)

5. Rationem habere inter se quantitates dicuntur, quæ possunt multiplicatæ se mutuo superare.

Hic ulterius explicatur quænam sint quantitates ejusdem generis, inter quas intercedit ratio, ut supra definit 3. vidimus; nim. quarum illa quæ antea erat minor, per multiplicationem sic potest augeri, ut majorem superet.

Unde patet inter illa, in quibus talis multiplicatio nullum habet locum, etiam nullam omnino dari rationem. Sic linea in infinitum multiplicata & sibi ipsi addita, nunquam fiet maior aliqua superficie: cum linea tali multiplicatione non degenerabit in superficiem; adeoque inter lineam & superficiem nulla intercedit ratio: quemadmodum etiam nulla reperitur inter lineam & corpus, nec inter superficiem & corpus; cum qualibet cunque multiplicatione nec linea, nec superficies relicta sua specie in corpus mu-

tabitur, adeoque nec ipso majus evadere possit.

Cum autem inter latus quadrati ejusque diagonalem multiplicatio obtineat, certo concludimus illa rationem inter se habere: latus enim ita multiplicari & sibi ipsi addi potest ut diagonalem superet; cum per 20. I. pateat duo latera trianguli majora esse tertio latere quod est ipsa diagonalis: Hæc autem ratio, ut supra notavimus, est irrationalis, cum veris numeris illam exprimere non detur.

Præterea rectilinea & curvilinea inter se rationem habere possunt; cum inter illa sit æqualitas & inæqualitas. Lunulæ crescentis quadraturam Hippocrâtes Chius, & Parabolæ Archimedes invenerunt. Anguli rectilinei cum curvilineo æqualitatem exhibuit Proclus.

6. In eadem ratione quantitates dicuntur esse prima ad secundam, & tertia ad quartam, cum prima suam secundam toties præse vel cum tali fractione continet vel in illa continetur, quoties præ-

*præcise vel cum quali fractione
tertia suam quartam continet vel
in illa continetur.*

Cum proportionalitatis indicium ab Euclide datum non ex ipsis propositis numeris sed qualicumque eorum multiplicatione sit deductum; nos illud nimis longe peritam aliquam proportionalium proprietatem suppeditare putamus; quare illo omisso aliud exhibemus indicium ex ipsis numeris propositis derivatum, & immediate ex rationis natura, antea explicata deductum.

Supra quippe vidimus rationem nihil aliud esse quam certam quandam formulam seu modum continendi, quo una quantitas aliam continet, vel ab alia continetur: quemadmodum positis duobus numeris 16 & 4. modus ille quo 16 numerum 4 continet potest exprimi per nomen quadrupli quia 16 ipsum 4 quatuor vicibus continet.

Si jam ex duobus aliis numeris 8 & 2, unus 8 alterum 2 etiam contineat eodem modo qui quadruplus dicitur, patet utrinque modum continendi esse æqualem vel potius eundem; cum autem;

ut supra notatum est, ratio & modus continendi sit unum & idem, facile concludimur, rationem etiam utrinque esse eandem : adeoque quatuor quantitates 16 & 4 ut & 8 & 2, binas ac binas sumptas esse in eadem ratione.

Eodem modo cum numerus 20 numerum 8 non absolute aliquot vicibus absque fractione contineat, sed modo continendi qui dicitur duplus cum dimidio; si ex numeris 10 & 4, primus 10 secundum 4 eodem modo duplo cum dimidio continet; utrinque modus continendi, seu quod jam pro eodem sumimus, ratio erit eadem adeoque quatuor quantitates 20.8 ut & 10.4. binæ ac binæ acceptæ, in eadem erunt ratione.

7. Eandem autem rationem habentes quantitates, vocantur proportionales. •

Quæ proportionales in duplici constituta sunt genere.

Aut enim sunt continue proportionales.

Aut non continue, quæ simpliciter tantum proportionales dicuntur.

Con-

Continue proportionales dicuntur illæ quantitates quæ sunt in Progressione geometrica, inter quas a termino ad terminum eadem contiuvatur ratio, eundem terminum bis repetendo, ut semel primæ rationis sit consequens, antecedens vero secundæ.

Ex. gr. ex progressionem gemetrica, cujus dominator est 2, scilicet 1. 2. 4. 8. 16. eligantur quatuor termini 1. 2. 4. 8. illi erunt continue proportionales; quia eadem ratio scilicet dupla a termino ad terminum continuo procedit: primus enim 1 se habet ad secundum 2, sicut idem secundus 2 ad tertium 4. deinde secundus 2 se habet ad tertium 4. quemadmodum idem tertius 4 se habet ad quartum 8.

Non continue proportionales dicuntur quantitates. quando eadem ratio quæ est inter primum & secundum non continuatur inter secundum & tertium, sed ibi interrupta demum inter tertium & quartum invenitur, ut in hisce numeris 12. 6. 8. 4. Ratio quæ est inter 12 & 6 non continuatur 6 & 8, sed ibi interrupta transit ad duos reliquos terminos 8 & 4, cum 8 numerum 4 toties contineat quoties 12 continet 6. Hæ autem
quan-

quantitates, ut supra notavimus, generali nomine dicuntur Proportionales.

8. *Cum vero prima quantitas secundam pluribus vel paucioribus vicibus contineat, quam tertia continet quartam, tunc prima ad secundam dicitur habere majorem vel minorem rationem quam tertia ad quartam.*

Ponantur quatuor numeri 8. 2. 6. 3. ex quibus primus 8 secundum numerum 2 pluribus vicibus (scilicet quatuor) contineat quam tertius 6 quartum 3. (qui illum bis continet), ratio quam 8 habet ad 2 erit major ratione 6 ad 3. Ex rationis enim natura supra vidimus rationem 8 ad 2 exprimi posse per fractionem $\frac{8}{2}$ (cujus valor est 4), ut & rationem 6 ad 2, per fractionem $\frac{6}{2}$ (quæ tantum 3 valet) Cum autem fractio prima secunda major sit, patet etiam immediate ex rationis natura primam rationem secunda esse majorem.

Deinde ex quatuor numeris 12. 6. 8. 2. primus numerus 12 secundum 6 paucioribus

bus vicibus contineat (sc. bis) quam tertius 8 quartum 2 (utpote quater) : erit fractio $\frac{12}{6}$ minor fractione $\frac{8}{2}$ quippe prima valet tantum 2 secunda vero 4. Cum autem fractio & ratio unum idemque sonent, etiam primam rationem secunda minorem esse patebit.

9. *Proportio vero in tribus ad minimum terminus consistit.*

Quælibet ratio duos requirit terminos: unum antecedentem & unum consequentem : Proportio vero duas ad minimum exigit rationes : adeoque quatuor postulat terminos : qui expresse etiam requiruntur si proportio non sit continua : si vero proportio constituatur continua, tres termini sufficiunt ; & tum medium bis sumendo idem est ac si quatuor essent positi. Quemadmodum in numeris 2. 4. 8. vel 16. 8. 4. vel aliis tribus quibuslibet, ratio primi ad secundum est prima : ratio vero ejusdem secundi ad tertium est altera, quæ duæ unam constituunt proportionem.

10. *Cum tres quantitates proportionales fuerint, prima ad tertiam dicitur duplicatam habere rationem eam quam eadem prima habet ad secundam.*

At vero cum quatuor quantitates fuerint continue proportionales; prima ad quartam dicitur triplicatam habere eam rationem, quam eadem prima habet ad secundam.

Et sic porro uno amplius, quamdiu proportio exstiterit.

Quidam putant rationem duplam & rationem duplicatam, unam & eandem rem significare, quæ duotamen accurate a se invicem sunt distinguenda.

Ratio enim dupla intercedit inter duas quantitates seu numeros, quorum unus alterum præcise bis continet; quemadmodum numeri 8 ad 4. vel 6 a 3. sunt in ratione dupla: cujus correlarum ratio subdupla est in rationibus 4 ad 8 vel 3 a 6.

Duplicata vero ratio etiam invenitur
in

in numeris, ubi rationis duplæ ne minimum apparet vestigium. Exemplo gratia in hisce tribus numeris continue proportionalibus 3. 9. 27. ratio quam primus 3 ad tertium 27 est duplicata rationis quam idem numerus primus 3 habet ad secundum 9; licet nulla inter illos inveniatur dupla; unde patet rationem duplam & duplicatam significare res toto cœlo diversas.

Dicitur autem ista ratio duplicata, quia ratio quæ est inter primum numerum & secundum, inter secundum & tertium adhuc semel quasi repetitur. Notandum autem est hanc rationis repetitionem non aliter concipiendam esse quam per formam Multiplicationis; ita ut positis rationis terminus 3 ad 9, ad repetendam adhuc semel eandem rationem illius termini per se ipsos debere multiplicari, scilicet 3 per 3 & 9 per 9. ut obtineatur ratio terminorum 9 ad 81, quæ ratio erit duplicata rationis 3 ad 9.

Adeoquæ primus terminus 3 se habebit ad tertium 27 ut 9 ad 81. Illos quippe numeros esse proportionales evidenter ex rationis & proportionantium natura antea tradita fit manifestum, cum nim. primus

3 in secundo 27 tot vicibus (scilicet novies) continetur, quot vicibus tertius 9 continetur in quarto 81.

Si jam porro ponantur quatuor continue proportionales 2. 4. 8. 16. ratio quæ est inter primum 2 & secundum 4, prima vice repetitur inter secundum 4 & tertium 8; & deinde secunda vice inter tertium 8 & quartum 16. Quæ repetitio cum per multiplicationem fiat, ut rationis 2 ad 4 inveniatur triplicata, termini 2 & 4 primo debent per se ipsos multiplicari; cuius multiplicationis productis 4 & 16 adhuc semel per eosdem terminos 2 & 4 multiplicatis obtinebuntur termini 8 & 64, constituentes quæsitam rationem triplicatam. Terminos enim 2. 16. 8. 64. esse inter se proportionales ex natura rationis facile probari potest.

Cæterum ex his omnibus notandum venit, rationem duplicatam nihil aliud esse quam rationem quadratorum, quæ a propositæ rationis terminis fiunt. Rationem autem triplicatam alicujus rationis unam eandemque esse cum ratione cuborum, quæ a terminis fiunt.

II. *Homologæ quantitates (in quatuor proportionalibus) dicuntur*

tur esse antecedentes quidem antecedentibus, consequentes vero consequentibus.

Sint quatuor proportionales 2. 4. 3. 6. quantitas prima 2 & tertia 3 sunt utriusque rationis antecedentes, adeoque homologæ seu ejusdem naturæ rem significantes: duæ vero reliquæ sc. secunda 4 & quarta 6, quia utriusque rationes sunt consequentes, similiter sunt homologæ.

De modis argumentandi.

Cum Mathematici ex quatuor proportionalibus non unam tantum sed plures eliciant conclusiones, quas modos seu formulas argumentandi vocant; Euclides illos ad sex revocat, qui totidem sequentibus proponuntur definitionibus, & in hoc libro 5 totidem fere propositionibus demonstrantur.

12. Alterna ratio est sumptio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

Sint quatuor quantitates proportiō-
nales

$$12 : 6 :: 8 : 4.$$

In quibus 12 & 8 sint antēcedentes;
reliqui vero 6 & 4 consequentes; alter-
nando erit

$$12 : 8 :: 6 : 4.$$

Hoc est Antecedens 12 est ad antece-
dentem 8, sicut consequens 6 ad conse-
quentem 4. Id quod demonstratur
prop. 16.

13. *Inversa ratio est sumptio
consequentis instar antecedentis
ad antecedentem velut consequen-
tem.*

Si ponantur quatuor proportionales

$$12 : 6 :: 8 : 4.$$

Ratio inversa sit erit.

$$6 : 12 :: 4 : 8.$$

Seu ordine retrogrado priorem pro-
portionem legendo

$$4 : 8 :: 6 : 12.$$

14. *Compositio rationis est
sumptis antecedentis cum conse-
quente*

quente velut unius ad ipsum consequentem.

Sint iterum quatuor proportionales

$$12 - 6 = 8 \mid 4.$$

Per compositionem rationis dicimus.

$$\frac{12 + 6}{\text{feu } 18} - 6 = \frac{8 + 4}{\text{feu } 12} \mid 4.$$

Hoc est prima quantitas una cum secunda sese habet ad ipsam secundam sicut tertia cum quarta ad ipsam quartam. Hujus demonstrationem vide prop. 18.

15. *Divisio rationis est sumtio excessus, quo antecedens superat consequentem, ad ipsum consequentem.*

Sint quatuor proportionales

$$18 - 6 = 12 \mid 4.$$

Per divisionem rationis proportio sic stabit.

$$\frac{18 - 6}{\text{feu } 12} - 6 = \frac{12 - 4}{\text{feu } 8} \mid 4.$$

Hoc est primus terminus minus seu dempto secundo se habet ad ipsum secundum.

cundum, quemadmodum tertius minus seu dempto quarto ad ipsum quartum. Hic argumentandi modus demonstratur prop. 17.

15. Conversio rationis est sumptio antecedentis ad excessum, quo antecedens superat ipsum consequens.

Propositi sint quatuor proportionales.

$$18 - 6 = 12 \mid 4.$$

Per conversionem rationis hanc habemus proportionem.

$$18 - \frac{18 - 6}{\text{seu } 12} = 12 \mid \frac{12 - 4}{\text{seu } 8}.$$

Hoc est primus se habet ad ipsum primum minus seu dempto secundo, quemadmodum tertius se habet ad ipsum tertium minus seu dempto quarto. Hæc demonstratur in Coroll. prop. 17.

17. Ex æqualitate ratio est, si plures duabus sint quantitates, & his aliæ multitudine pares, quæ binæ sumantur in eadem ra-

tione; cum ut in primis quantitatibus prima ad ultimam, sic & in secundis prima ad ultimam se habeat.

Sint tres quantitates. 12. 6. 4.

Et adhuc tres aliæ. 6. 3. 2.

Per rationem quæ est ex æqualitate. concludimus

$$12 - 4 = 6 \mid 3.$$

Hoc est prima superiorum se habet ad suam ultimam, quemadmodum prima inferiorum ad suam tertiam.

Quia autem hæc conclusio duobus modis ex istis sex quantitatibus elicitur, duplex etiam se aperit ex æqualitate ratio; sc. Ordinata & Perturbata.

18. *Ordinata proportio est. cum fuerit (positis scilicet) (ex quantitatibus) ut prima superiorum ad suam secundam, ita prima inferiorum ad suam secundam; deinde ut secunda superiorum ad suam ultimam, ita secunda inferiorum ad suam ultimam: & con-*

XX

clu-

cluditur quod prima superiorum se habeat ad suam ultimam, quemadmodum prima inferiorum ad suam ultimam.

Sint tres quantitates 12. 6. 4.

Et tres aliæ 6. 3. 2.

In quibus $12 \div 6 = 6 \mid 3$.

Deinde $6 \div 4 = 3 \mid 2$.

Proportio ex æquo ordinata sic stabit.

$$12 \div 4 = 6 \mid 2.$$

Hujus modi demonstrationem vide prop. 22.

Cæterum hæc proportio dicitur Ordinata, quia & in superioribus & in inferioribus eundem servat ordinem.

19. *Perturbata autem proportio est, cum positis tribus quantitatibus & aliis tribus; ut in superioribus prima se habeat ad suam secundam, sic in inferioribus secunda ad suam ultimam: & in superioribus secunda ad suam ultimam, ita in inferioribus prima ad suam secundam: & concluditur*

*tur : quod prima superiorum se
ita habeat ad suam ultimam,
quemadmodum prima inferiorum
ad suam ultimam.*

Sint tres quantitates 12. 6. 3.

Et aliae totidem 16. 8. 4.

In quibus $12 - 6 = 8 \mid 4.$

Et $6 - 3 = 16 \mid 18.$

Proportio ex æquo perturbata sic erit

$$12 - 3 = 16 \mid 4.$$

Hujus demonstrationem vide pro. 23.

Perturbata dicitur hæc proportio,
quod in superioribus & inferioribus non
idem servetur ordo, sed ille quasi pertur-
betur.

LEMMA I.

*Multiplicatio nihil est aliud
quam multiplex additio: sicut e-
tiam divisio nihil aliud quam mul-
tiplex & compendiosa subtractio.*

DEMONSTRATIO.

Pars I. Sit numerus 6 multiplicandus

X 2

per

per numerum 4, nihil aliud imperatum est quam, ut numerus 6 toties sumatur, seu repetatur seu sibi ipsi addatur, quoties unitas continetur in 4, sc. quater: adeoque idem facimus sive numerum 6 multiplicemus per 4, sive eundem quater ponam & illos quatuor numeros 4 in unam summam colligam, cum utrobique obtineatur 24.

Pars 2. Si numerus 24 proponatur dividendus per numerum 4, idem est ac si examinandum esset, quoties numerus 4 a 24 possit subtrahi id quod in divisione unica subductione fit divisore prius per quotientem multiplicato cum subtractiones tot fieri possint, quot unitates divisionis contineat quotiens. Quare nulla est differentia sive 24 dividatur per 4 sive 4 a 24 subtrahatur quoties fieri potest cum utrobique idem obtineatur quotiens 6.

Notandum autem in multiplicatione non semper opus esse ut multiplicatio revera fiat, & numeri inter se commisceantur, ut productum unico numero exprimatur; cum eadem multiplicatio alia etiam forma designari possit, nimirum multiplicatores juxta se invicem scribendo

do interposito signo . x .

Ex. gr: sit 8 multiplicandus per 4 facta multiplicatione obtinetur productum 32, quod etiam hoc modo exprimi potest $8 \cdot x \cdot 4$. quod in pronuntiatione valet 8 multiplicata per 4.

Quæ exprimendi forma hoc habet commodum quod jam pateat ad oculum per quam operationem & ex quibus numeris illud productum sit ortum, quod in altero producto 32 non tam clare distinguere potest. cum illud etiam ex multis aliis additionibus & multiplicationibus generari potuisset.

Præterea si productam $8 \cdot x \cdot 4$ dividendum sit per 4, omisso numero 4 scribendum erit 8. vel scribendum est 4, si dividi debeat per 8.

Similiter in divisione non opus est ut semper vera fiat divisio; cum quotiens quæsitus etiam alia forma possit exprimi, si nim. numero dividendo subscribatur divisor inter utrumque ducta lineola.

Ex. gr. oporteat dividere numerum 32 per 8, facta reali divisione obtinetur quotiens 4, qui etiam designari posset

per formam fractionis $\frac{32}{8}$, qui quotiens

X x 3

tiens in elocutione idem valet 32 partes quartæ, seu 32 divisa per 4.

LEMMA II.

Si duo aequales numeri per eundem numerum multiplicentur, producta erunt inter se equalia. Si vero per eundem numerum dividantur, quotientes erunt aequales.

DEMONSTRATIO.

1 Pars. Per Lemna 1 multiplicatio est multiplex & compendiosa additio: adeoque unus numerus multiplicandus toties sibi additur, quoties alter (qui priori ponitur æqualis) sibi ipsi additur: quia multiplicator utrimque ponitur idem: unde patet idem fieri ac si æqualibus æqualia addantur; quando nimirum summæ (quæ producto æquivalent) inter se sunt æquales:

1 Ax. 2.

2. Pars. Per idem Lemna 2 divisio est multiplex ac compendiosa subtractio: ergo ab uno numero dividendo toties subtrahitur divisor quoties ab altero dividendo (qui per hypothesein priori æqualis est)

est) subtrahitur idem divisor : quare in ista divisione utrinque idem fit, ac si ab æqualibus æqualia demantur; quare residua (quæ quotientibus æquivalent) inter se sunt æqualia.

b Ax. 3.

LEMMA III.

Si duo in æquales numeri per eundem numerum multiplicentur producta erunt inter se inæqualia. Si vero per eundem divisorem dividantur, quotientes erunt inæ-
les.

DEMONSTRATIO.

1 Pars. Cum per Lemma 1 multiplicatio sit compendiosa Additio: si duo numeri inæquales per eundem numerum multiplicentur, idem est ac numerus major toties sibi addatur quoties minor minori. At vero si inæqualibus æqualia adjiciantur, a tota sunt inæqualia per Ax. 2 Ax. 4. Ergo etiam, si numero majori major toties adjiciatur quoties minori additur minori, prior summa, quæ hic producto æquivalet, erit maior altera.

2. Pars

2 Pars. Quia divisio nihil aliud est quam compendiosa subtractio, si duo numeri inæquales per eundem numerum dividantur, nihil aliud fit quam quod idem numerus ab una parte a majori subtrahitur, ab altera vero a minori.

Patet autem eundem numerum pluries subtrahi a majori posse quam a minori; cum major eundem numerum pluries contineat quam minor: & cum plures istæ subtractionis vices constituent majorem quotientem, sequitur ex divisione majoris numeri per alium quemlibet acquiri majorem quotientem, quam ex minoris numeri per eundem divisione.

LEMMA IV.

Si idem numerus vel duo numeri æquales per numeros inæquales multiplicentur, producta erunt inæqualia, & quidem productum majoris multiplicatoris erit majus producto minoris multiplicatoris.

Ut & si dividantur per numeros inæquales, quotientes erunt inæquales. Major quidem ille ubi di-

*divisor est minor; at vero minor,
ubi divisor est major.*

DEMONSTRATIO.

Hæc ex superioribus nullo negotio deduci potest.

Quatuor hisce Lemmatibus præmissis, & qualicunque Arithmeticarum in fractionibus operationum notitia præsupposita, quædam subjungimus Theoremata, quæ tanquam generale omnium fere totius libri quinti propositionum demonstrandarum fundamentum præstruimus.

THEOREMA I.

Si quatuor quantitates sint proportionales, productum quod oritur ex multiplicatione extremarum est æquale producto multiplicationis mediarum.

DEMONSTRATIO.

Sint quatuor proportionales.

$$8 \text{ — } 4 \text{ = } 6 \text{ | } 3.$$

Ratio 8 ad 4 eadem est cum fractione

Y y

86

$\frac{8}{4}$ & ratio 6 ad 3 exprimitur per fractionem $\frac{6}{3}$: quia autem rationes sunt eadem seu æquales ; erunt quoque fractiones inter se inter se æquales.

$$\text{Adeoque } \frac{8}{4} \propto \frac{6}{3}.$$

———— utrinque multipl. per 4.

$$8 \propto \frac{4 \cdot x \cdot 6}{3} \text{ Per Lemma 2.}$$

Et ——— utrimque multipl. per 3.

$$8 \cdot x \cdot 3 \propto 4 \cdot x \cdot 6 \text{ per Lem. 2.}$$

Hoc est productum extremorum 8 & 3 per se invicem multiplicatorum est æquale producto mediorum etiam multiplicatorum. Q. E. D.

THEOREMA II.

Si duo producta sint inter se æqualia, unus multiplicator primi producti se habet ad unum multiplicatorem secundi producti, quemadmodum reciproce alter multiplicator ejusdem secundi producti se habet ad alterum multiplicatorem primi producti.

De-

DEMONSTRATIO.

Sint duo producta inter se æqualia.

$$8 \cdot x \cdot 3 \propto 4 \cdot x \cdot 6. \text{ per Lemma 2.}$$

utrimque divid, per 3.

$$8 \propto 4 \cdot x \cdot 6. \text{ per Lemma 2.}$$

$$3.$$

utrimque divid. per 4.

$$\frac{8}{4} \propto \frac{6}{3} \text{ per Lemma 2.}$$

Quæ fractiones si revocentur ad rationes. erit

$$8 - 4 = 6 \mid 3.$$

Quod juxta tenorem Theorematis E. D.

COROLLARIUM I.

Eodem modo posset demonstrari esse.

$$\bullet \quad 8 - 6 = 4 \mid 3.$$

$$\text{Vel } 3 - 4 = 6 \mid 8.$$

$$\text{Vel } 3 - 6 = 4 \mid 3.$$

Quæ proportionēs involvunt tum Alternationem, tum inversam etiam rationem.

COROLLARIUM II.

Hinc evidenter patet, si quælibetunque quatuor quantitates eo ordine sint positæ, & productum extremarum producto mediarum fuerit æquale, certissime inde concludi posse., istas quatuor quantitates eo ordine proportionales esse.

SCHOLIUM.

Si quilibet datus numerus ex.gr. 24. resolvatur in duos per quorum multiplicationem potuerit generari (quod hic quater potest fieri vel per 1 in 24. vel per 2 in 12. vel per 3 in 8. vel per 4 in 6.) facile probatur esse.

	1	—	2	==	12	1	24.
Vel	2	—	3	==	8	1	12.
Vel	3	—	4	==	6	1	8.
Vel	1	—	3	==	8	1	24.
Vel	1	—	4	==	6	1	24.
Vel	2	—	4	==	6	1	12.

Et sic de quolibet alio numero dato.

Theore-

THEOREMA III.

Si ex quatuor quantitatibus prima ad secundam majorem habeat rationem, quam tertia ad quartam: productum quod fit per multiplicationem extremarum majus erit producto mediarum.

DEMONSTRATIO.

Sit in quatuor hisce quantitatibus

$$8 \text{ — } 3 \text{ } < \text{ } 4 \text{ } 1 \text{ } 2.$$

Erit secundum ante dicta.

$$\frac{8}{3} < \frac{4}{2}.$$

$$\frac{8}{3} < \frac{4}{2} \quad \text{utrinque multipl: per 3.}$$

$$8 \cdot x \cdot 4 \text{ per Lemina 3.}$$

$$2.$$

$$8 \cdot x \cdot 2 < 3 \cdot x \cdot 4. \text{ per Lemna 3.}$$

Hoc est productum extremorum 8 & 2 majus producto mediorum 3 & 4.

Q. E. D.

Y y 3

Theore.

THEOREMA IV.

Si duo producta sint inæqualia, prima quantitas multiplicans majoris producti ad primam quantitatem multiplicantem minoris producti majorem habebit rationem, quam reciproce secunda quantitas ejusdem minoris producti ad secundam quantitatem majoris producti.

DEMONSTRATIO.

Sit ex propositis hisce productis

$$8 \cdot x \cdot 2 < 3 \cdot x \cdot 4.$$

———— utrinque divid. per 2.

$$8 < \frac{3 \cdot x \cdot 4}{2} \text{ per Lemma 3.}$$

———— utrimque div. per 3.

$$\frac{8}{3} < \frac{4}{2}$$

Hoc est redigendo hasce fractiones ad rationes

$$8 - 3 < 4 | 3.$$

Q. E. D.

Co-

COROLLARIUM I.

Eadem methodo facile posset demonstrari esse

$$\begin{array}{l} 8 \text{ ————— } 4 < 3 \text{ l } 2. \\ \text{Vel } 2 \text{ ————— } 3 < 4 \text{ l } 8. \\ \text{Vel } 2 \text{ ————— } 4 < 3 \text{ l } 2. \end{array}$$

COROLLARIUM II.

Hinc sequitur, si quælibet cunquæ quatuor quantitates ordine sint positæ, & productum extremarum producto mediarum sit majus, firmiter concludendum esse, primam ad secundam habere majorem rationem, quam tertia habet ad quartam.

SCHOLIUM.

Si duo quilibet numeri inæquales 24 & 16 resolvantur in suos multiplicationes

sc: 24	& 16.
in	in
1. 24.	1. 16.
2. 12.	2. 8.
3. 8.	4. 4.
4. 6.	

ex hoc Theoremate patet esse

$$\text{Vel } 1 \text{ ——— } 1 < 16 \mid 24.$$

$$\text{Vel } 1 \text{ ——— } 2 < 8 \mid 24.$$

$$\text{Vel } 1 \text{ ——— } 4 < 4 \mid 24.$$

Deinde

$$\text{Vel } 2 \text{ ——— } 1 < 16 \mid 12.$$

$$\text{Vel } 2 \text{ ——— } 2 < 8 \mid 12.$$

$$\text{Vel } 2 \text{ ——— } 4 < 4 \mid 12.$$

Postea.

$$\text{Vel } 3 \text{ ——— } 1 < 16 \mid 8.$$

$$\text{Vel } 3 \text{ ——— } 2 < 8 \mid 8.$$

$$\text{Vel } 3 \text{ ——— } 4 < 4 \mid 8.$$

Denique

$$\text{Vel } 4 \text{ ——— } 1 < 16 \mid 6.$$

$$\text{Vel } 4 \text{ ——— } 2 < 8 \mid 6.$$

$$\text{Vel } 4 \text{ ——— } 4 < 4 \mid 8.$$

Præter alias 36 majoritatis proportion-
nes, quæ ex hisce numeris elici possunt.

Theo-

THEOREMA 5.

Si ex quatuor quantitatibus prima ad secundam minorem habeat rationem, quam tertia ad quartam; productum quod fit per multiplicationem extremarum minus erit producto mediarum.

DEMONSTRATIO.

Sit in quatuor hisce quantitatibus

$$4 - 2 > 8 \mid 3.$$

$$\text{Erit } \frac{4}{2} > \frac{8}{3}$$

utrinque multipl. per 3.

$$\frac{4 \cdot x \cdot 3}{2} > 8. \text{ Per Lemma 3.}$$

utrinque multipl. per 2.

$$4 \cdot x \cdot 3 > 8 \cdot x \cdot 2. \text{ per Lemma 3,}$$

Hoc est productum extremarum 4 & 3 est minus producto mediarum 2. 8:

THEOREMA 6.

Si duo producta sint inæqualia, prima quantitas multiplicans minoris producti ad primam quantitatem multiplicantem majoris producti minorem habebit rationem, quam reciproca secunda quantitas ejusdem majoris producti ad secundam quantitatem minoris producti.

DEMONSTRATIO.

Sit ex duobus hisce productis.

$$4 \cdot x \cdot 3 > 8 \cdot x \cdot 2.$$

utrinque divid. per 2.

$$\frac{4 \cdot x \cdot 3}{2} > 8. \text{ Per Lemma 3,}$$

utrinque div. per per 3.

$$\frac{4}{2} > \frac{8}{3} \text{ per Lemma 3.}$$

Hoc est redigendo ad rationes

$$4 : 2 > 8 : 3.$$

Co.

COROLLARIUM I.

Eadem methodo facile posset demonstrari. quod sit

$$\begin{array}{l} \text{Vel } 4 \text{ --- } 8 > 2 \text{ l } 3. \\ \text{Vel } 3 \text{ --- } 8 > 2 \text{ l } 4. \\ \text{Vel } 3 \text{ --- } 2 > 8 \text{ l } 4. \end{array}$$

COROLLARIUM. II.

Hinc patet, si quælibetunque quatuor quantitates ordine sint positæ, & productum extremarum sit minus producto mediarum, certissime concludi, primam ad secundam habere minorem rationem, quam tertia ad quartam.

SCHOLIUM.

Si duo quilibet numeri inæquales 16 & 24 resolvantur in suos multiplicatores:

sc: 16.	24.
in	
1. 16.	1. 24.
2. 8.	2. 12.
4. 4.	3. 8.
	4. 6.

Ex hoc Theoremate patet esse

$$\begin{array}{l} \cdot \quad 1 \text{ — } 1 \text{ } \triangleright \quad 24 \cdot 1 \text{ } 16. \\ \text{Vel } 1 \text{ — } 2 \text{ } \triangleright \quad 12 \text{ } 1 \text{ } 16. \\ \text{Vel } 1 \text{ — } 3 \text{ } \triangleright \quad 8 \text{ } 1 \text{ } 16. \\ \text{Vel } 1 \text{ — } 4 \text{ } \triangleright \quad 6 \text{ } 1 \text{ } 16. \end{array}$$

Præterea.

$$\begin{array}{l} \text{Vel } 2 \text{ — } 1 \text{ } \triangleright \quad 24 \text{ } 4 \text{ } 8. \\ \text{Vel } 2 \text{ — } 2 \text{ } \triangleright \quad 12 \text{ } 1 \text{ } 8. \\ \text{Vel } 2 \text{ — } 3 \text{ } \triangleright \quad 8 \text{ } 1 \text{ } 8. \\ \text{Vel } 2 \text{ — } 4 \text{ } \triangleright \quad 6 \text{ } 1 \text{ } 8. \end{array}$$

Denique

$$\begin{array}{l} \text{Vel } 4 \text{ — } 1 \text{ } \triangleright \quad 24 \text{ } 1 \text{ } 4. \\ \text{Vel } 4 \text{ — } 2 \text{ } \triangleright \quad 12 \text{ } 1 \text{ } 4. \\ \text{Vel } 4 \text{ — } 3 \text{ } \triangleright \quad 8 \text{ } 1 \text{ } 4. \\ \text{Vel } 4 \text{ — } 4 \text{ } \triangleright \quad 6 \text{ } 1 \text{ } 4. \end{array}$$

Præter alias 36 minoritatis proportionēs, quæ ex hisce numeris deduci possunt.

Jam sequuntur ipsæ Libri quinti Propositiones.

PRO-

PROPOSITIO I.

Si sunt quotcunque magnitudines seu quantitates proportionales A. B. C. D. E. F. quemadmodum se habuerit una antecedentium ad suam consequentem, ita omnes antecedentes G simul se habebunt ad omnes consequentes etiam simul sumptas H.

DEMONSTRATIO.

Sint in eadem inter se ratione

$$\begin{array}{rcl} A & 3 & \text{---} 1 B \\ C & 6 & \text{---} 2 D \\ E & 9 & \text{---} 3 F \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{rcl} A & 3 & \text{---} 1 B \\ C & 6 & \text{---} 2 D \\ E & 9 & \text{---} 3 F \end{array}} \right\} A$$

$$G \quad 18 \text{ --- } 6 H.$$

Demonstrandum est esse summam ad summam ut quælibet antecedens ad suam consequentem.

Hoc est $18 \text{ --- } 6 = 3 \mid 1.$

Deinde $18 \text{ --- } 6 = 6 \mid 2.$

Denique $18 \text{ --- } 6 = 9 \mid 3.$

Quia in qualibet proportionem productum extremorum facta multiplicatione est æquale producto mediorum, quatuor illarum termini sunt ^a proportionales.

^a 2 Corol.
Theor. 2.

PROPOSITIO II. & XXIV.

Si prima A ad secundam B eandem habuerit rationem, quam tertia C ad quartam D; habuerit autem & quinta E ad secundam B eandem rationem quam sexta E ad quartam D; Etiam G, composita prima cum quinta ad secundam B, eandem habebit rationem quam H tertia cum sexta ad quartam D.

DEMONSTRATIO.

$$\begin{array}{ccccccc} & A & & B & & C & D \\ \text{Sit } 4 & \text{---} & 2 & = & 6 & 1 & 3. A. \\ E & 10 & & & & & \\ \hline G & 14 & & & F & 15 & \\ & & & & H & 21 & \end{array}$$

Si instituaturs multiplicatio, producta erunt æqualia, ergo (a) istæ quantitates sunt proportionales.

a Theor.
2.

Aliter

$$\begin{array}{cc} \frac{4}{2} \propto \frac{6}{3} \\ \frac{10}{2} \propto \frac{15}{3} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{cc} \frac{4}{2} \propto \frac{6}{3} \\ \frac{10}{2} \propto \frac{15}{3} \end{array}} \right\} A.$$

b Ax. 2.

$$\frac{14}{2} b \propto \frac{21}{3} \text{ vel in proportione.}$$

$$14 \text{ --- } 2 = 21. \quad 13. \quad Q. E. D.$$

Pro

PROPOSITIO III.

Si quatuor quantitates A. B. C. D. sint proportionales; & prima A & tertia C per eundem quemlibet numerum G multiplicentur: productum primum E se habebit ad secundam B, quemadmodum productum secundum F ad quartam D.

DEMONSTRATIO.

$$\begin{array}{rcl} \begin{array}{c} A \\ 4 \\ \hline G \ 2 \\ \hline E \ 8 \end{array} & \begin{array}{c} B \\ 2 \\ \hline G \ 2 \\ \hline F \ 12 \end{array} & \begin{array}{c} C \ D \\ 6 \ 1 \ 3 \\ \hline G \ 2 \\ \hline \end{array} \} M. \end{array}$$

Demonstrandum est

$$\begin{array}{c} E \quad B \quad F \quad D \\ 8 \quad \text{---} \quad 2 \quad = \quad 12 \quad 1 \quad 3. \end{array}$$

Id quod (a) exinde patet, quod producta extremorum & mediorum sunt æqualia, a Theor. 2.

Aliter

$$\frac{4}{2} \propto \frac{6}{3}$$

utrimque multipl. per 2.

$$\frac{8}{2} \propto \frac{12}{3} \quad \text{Lemna 2.}$$

Hoc est in proportionem

$$8 \text{ --- } 2 = 12 \ 1 \ 3.$$

Pro-

PROPOSITIO. IV.

Si quatuor quantitates A. B. C. D. sint proportionales; prima vero A & tertia C. per quemlibet eundem numerum G multiplicentur; ut & secunda B & tertia D per alium numerum K. quatuor ista producta inter se proportionalia erunt.

DEMONSTRATIO.

Sint quatuor proportionales

$$\begin{array}{ccccccc} A & B & C & D & & & \\ 4 & 2 & 6 & 3 & & & \\ \hline G & K & G & K & & & \\ 2 & 3 & 2 & 3 & & & \\ \hline E & L & F & M & & & \end{array}$$

Demonstrandum est quatuor producta E. L. F. M. esse proportionalia seu

$$8 : 6 :: 12 : 9.$$

Quod ex Theor. 2 sequitur, quia facta multiplicatione producta extremorum & mediorum inter se sunt æqualia.

Aliter

$$\frac{4}{2} \propto \frac{6}{3}$$

multipl. per 2,

$$\frac{8}{2} \propto \frac{12}{3} \text{ Lemma 2.}$$

divide per 3,

$$\frac{8}{6} \propto \frac{12}{9} \text{ per idem Lemma 2.}$$

Hoc est in proportionem

$$8 : 6 :: 12 : 9.$$

Pro-

PROPOSITIO V. XIX.

*Si totum A ad totum B eandem
habuerit rationem, quam ablata
pars C ad partem ablatam D: e-
tiam pars reliqua E ad partem re-
liquam F, eandem habebit ratio-
nem, quam totum A ad totum B.*

DEMONSTRATIO.

$$\begin{array}{ccc} A & 8 & 4 \quad B \\ C & 6 & 3 \quad D \end{array} \bigg| \begin{array}{c} S \\ S \end{array}$$

Erit E F A B.
 2 $\frac{4}{1}$ 1 = 8 1 4.

Quia producta sunt æqualia.
per Theor. 2.

PROPOSITIO VI.

Si prima A ad secundam B eandem habuerit rationem, quam tertia C ad quartam D, habuerit autem & quinta E ad secundam B eandem rationem quam sexta F ad quartam D. Si quinta E subtrahatur a prima A; & sexta F a tertia C,

Vel residuum primum G erit æquale secunde B & residuum secundum H æquale quartæ D.

Vel residuum primum G se habebit ad secundam B sicut residuum secundum H ad quartam D.

DEMONSTRATIO.

CASUS I.

A		B		C		D
12	—	2	=	18	1	3.
E 10				F 15		3.
G 2				H 3.		

CA-

CASUS II.

$$\begin{array}{cccc}
 A & B & C & D \\
 12 & - & 2 & = & 18 & 1 & 3. \\
 E & 4 & & & F & 6 & \\
 \hline
 \text{Erit } G & B & H & D. \\
 8 & - & 2 & = & 12 & & 3.
 \end{array}$$

Per Theor. 2

Alter.

CASUS I.

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{12}{2} & \propto & \frac{18}{3} \\
 \hline
 \frac{10}{2} & \propto & \frac{15}{3}
 \end{array}
 \quad S$$

$$\frac{2}{2} \propto \frac{3}{3} \quad \text{per Axioma 3.}$$

Erit in proportione, quæ ex rationis æqualitatis

$$2 - 2 = 3 \quad 1 \quad 3.$$

CASUS II.

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{12}{2} & \propto & \frac{18}{3} \\
 \frac{4}{2} & \propto & \frac{6}{3} \\
 \hline
 \frac{8}{2} & \propto & \frac{12}{3}
 \end{array}$$

Hoc est in proportione

$$8 - 2 = 12 \quad 1 \quad 3.$$

Aaa 2 Pro-

PROPOSITIO VII.

1. *Æquales A & A ad eandem C eandem habent rationem.*
2. *Et eadem C ad æquales A & A eandem habet rationem.*

DEMONSTRATIO.

PARS I.

$$\begin{array}{cccc} A & . & C & & A & & C. \\ 12 & \text{—} & 4 & = & 12 & | & 4. \end{array}$$

PARS II.

$$\begin{array}{cccc} C & & A & & C & & A. \\ 4 & \text{—} & 12 & = & 4 & | & 12. \end{array}$$

Quia utrobique producta sunt æqualia. per Th: 2.

Pro-

PROPOSITIO VIII.

1. *Inæqualium quantitatū A. B. major A ad eandem C majorem rationem habet, quam minor B.*

2. *Et eadem C ad minorem B majorem habet rationem quam ad majorem A.*

DEMONSTRATIO.

PARS I.

$$\begin{array}{ccc} A & & B \\ 16 & \triangleleft & 8 \text{ ex hypoth.} \end{array}$$

utrinque divide per 5. C.

$$\frac{16}{5} \triangleleft \frac{8}{5} \text{ per Lemma 3.}$$

Hoc est in proportione

$$16 - 5 \triangleleft 8 \quad | \quad 5.$$

PARS II.

$$\begin{array}{ccc} 5 & \supset & 5 \\ 8 & \triangleright & 16 \end{array} \text{ D.}$$

$$\frac{5}{8} \triangleright \frac{5}{16} \text{ per Lemma 4.}$$

Hoc est in proportione.

$$5 - 8 \triangleleft 5 \quad | \quad 16.$$

Aaa 3

Pro

PROPOSITIO IX.

1. Si A & B ad eandem C habeant eandem rationem, illæ æquales inter se erunt.

2. Et si eadem C ad A & B habeat eandem rationem, illæ itidem æquales erunt.

DEMONSTRATIO.

PARS I.

$$\begin{array}{cccc} A & C & B & C \\ 15 & - & 4 = & 15 \quad | \quad 4. \\ \text{Ergo } \frac{15}{4} & \propto & \frac{15}{4} & \end{array}$$

*multipl. per 4.

$$15 \propto 15.$$

PARS II.

$$\begin{array}{cccc} C & H & C & B \\ 4 & - & 15 = & 4 \quad | \quad 15. \\ \text{Ergo } \frac{4}{15} & \propto & \frac{4}{15} & \end{array}$$

mult. per 15.

$$15 \cdot x \cdot 4 \propto 15 \cdot x \cdot 4. \text{ per Lem. 2.}$$

div. per 4.

$$15 \propto 15. \text{ per idem Lemma 2.}$$

Pro,

PROPOSITIO. X.

1. Si A ad C maiorem rationem habet quam B ad eandem C ; erit A maior quam C .

2. At si eadem C ad B maiorem rationem habuerit quam ad A , erit B minor quam A .

DEMONSTRATIO.

PARS I:

$$\begin{array}{rcccl}
 A & C & B & C & \\
 16 & \text{---} & 4 & \triangleleft & 8 \quad | \quad 4. \\
 \text{Ergo} & \frac{16}{4} & \triangleleft & \frac{8}{4} & \\
 \hline
 & & & & \text{mult. per 4.} \\
 & & & & \text{per Lemma 3.} \\
 & 16 & \triangleleft & 8. &
 \end{array}$$

PARS II.

$$\begin{array}{rcccl}
 C & B & C & A. & \\
 4 & \text{---} & 8 & \triangleleft & 4 \quad | \quad 16. \\
 & \frac{4}{8} & \triangleleft & \frac{4}{16} & \\
 \hline
 & & & & \text{Multipl. per 8.} \\
 & 4 & \triangleleft & \frac{4 \cdot x \cdot 8}{16} & \text{per Lemma.}
 \end{array}$$

Mul;

$$4 \cdot x \cdot 16 < 4 \cdot x \cdot 8. \text{ Lem. 3.}$$

$$16 < 8. \text{ div. per 4.}$$

Alio modo.

A C B C

$$16 \text{ — } 4 < 8 \mid 4.$$

$$\text{Ergo } 4 \cdot x \cdot 16 < 4 \cdot x \cdot 8. \text{ The. 3.}$$

$$16 < 8. \text{ Lemma 3. div. per 4.}$$

P A R S II.

C B C A.

$$4 \text{ — } 8 < 4 \mid 16.$$

$$\text{Ergo } 4 \cdot x \cdot 16 < 4 \cdot x \cdot 8. \text{ Theor. 4.}$$

$$16 < 8. \text{ Lemma 3. div: per 4.}$$

PROPOSITIO XI.

Rationes, quæ eidem rationi sunt eadem, vel similes vel æquales, inter se sunt eadem vel similes vel æquales.

DEMONSTRATIO.

Sit 8 — 4 = 6 l 3.

Et 10 — 5 = 6 l 3.

Erit 8 — 4 = 10 l 5.

Quia nimir. producta sunt æqualia. per Theo. 2. Vel sic,

$$\begin{array}{ccc} 8 & \propto & 6 \\ \frac{8}{4} & \propto & \frac{6}{3} \\ 10 & & 6 \\ \frac{10}{5} & \propto & \frac{6}{3} \end{array}$$

Ergo $\frac{8}{4} \propto \frac{10}{5}$ Ax. I.

Hoc est in proportione.

8 — 4 = 10 l 5.

PROPOSITIO XII.

Hæc est eadem cum prima, quæ videri potest.

PROPOSITIO XIII.

Si prima ratio sit equalis secunde rationi; secunda vero sit major tertiâ: similiter etiam prima tertia major erit.

DEMONSTRATIO.

Sit $16 \text{ — } 8 = 12 \text{ l } 6.$

At vero $12 \text{ — } 6 < 4 \text{ l } 3.$

Ergo $16 \text{ — } 8 < 4 \text{ l } 3.$

Quia productum extremorum est majus producto mediorum. per 2 Coroll.
Theor: 4.

Vel hoc modo.

$$\frac{16}{8} \propto \frac{12}{6}$$

$$\text{Atqui } \frac{12}{6} < \frac{4}{3}.$$

$$\text{Ergo } \frac{16}{8} < \frac{4}{3}$$

Et in proportionem

$$16 \text{ — } 8 < 4 \text{ l } 3$$

Pro-

PROPOSITIO XIV.

Si quatuor proportionalium A. B. C. D. prima A fuerit major tertia C, erit & secunda major quarta D.

Si A aequalis C erit B aequalis D.

Si A minor C, erit B minor D.

DEMONSTRATIO.

CASUS I.

$$\begin{array}{cccc}
 A & B & C & D \\
 12 & \text{---} & 8 & = 6 \quad 1 \quad 4. \\
 \text{Ergo } 12 \cdot x \cdot 4 & \propto & 8 \cdot x \cdot 6 & \text{Div.} \\
 12 & & < 6 & \\
 \hline
 4 & & > 8. & \text{per Lemma 4.}
 \end{array}$$

CASUS II.

$$\begin{array}{cccc}
 A & B & C & D. \\
 12 & \text{---} & 4 & = 12 \quad 1 \quad 4. \\
 \text{Ergo } 12 \cdot x \cdot 4 & \propto & 12 \cdot x \cdot 4 & \} D. \\
 12 & & \propto 12 & \\
 \hline
 4 & \propto & 12. & \text{Per Lemma 2.}
 \end{array}$$

CASUS III.

$$\begin{array}{cccc}
 A & B & C & D. \\
 4 & \text{---} & 6 & = 8 \quad 1 \quad 12. \\
 \text{Ergo } 4 \cdot x \cdot 12 & \propto & 6 \cdot x \cdot 8 & \} D. \\
 4 & & > 8 & \\
 \hline
 12 & & < 6. & \text{Lemma 4.} \\
 & & Bbb & 2 \quad \text{Pro-}
 \end{array}$$

PROPOSITIO XV.

Si duæ quantitates A & B æqualibus vicibus sumantur seu per eundem numerum multiplicentur, summæ seu producta habebunt inter se eandem rationem quam habent positæ quantitates A & B.

DEMONSTRATIO.

$$\begin{array}{r} A \qquad B \\ 4 \qquad 12 \\ 2 \qquad 2 \end{array} M.$$

$$\text{Erit } 8 \text{ — } 24 = 4 \text{ l } 12.$$

Quia producta sunt æqualia. Theor: 2.

S C H O L I U M.

Si eædem quantitates A & B per eundem numerum dividantur, quotientes ipsis quantitatibus proportionales erunt.

$$\begin{array}{r} A \qquad B \\ 4 \qquad 12 \\ 2 \qquad 2 \end{array} D.$$

$$2 \text{ — } 6 = 14 \text{ l } 12. \text{ per Th: 2.}$$

Pro.

PROPOSITIO XVI.

Si quatuor quantitates A. B. C. D. proportionales fuerint, illæ etiam vicissim proportionales erunt.

DEMONSTRATIO.

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ 16 & \text{---} 8 & = & 4 \quad 1 \quad 2. \end{array}$$

Erit etiam vicissim, seu permutando.

$$16 \text{ --- } 4 = 8 \quad 1 \quad 3.$$

Quia facta multiplicatione producta sunt æqualia, per Theor: 2.

SCHOLIUM.

Commode hic demonstratur ratio inversa. Sint Proportionales.

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D. \\ 16 & \text{---} 8 & = & 4 \quad 1 \quad 2. \end{array}$$

Erit per Theor. I.

$$16 \cdot x \cdot 2 \propto 8 \cdot x \cdot 4.$$

Ergo per Theor: 2.

$$2 \text{ --- } 4 = 8 \quad 1 \quad 16. \quad \text{Q. E. D.}$$

PROPOSITIO XVII.

Si compositæ quantitates proportionales fuerint, illæ quoque divisæ proportionales erunt.

DEMONSTRATIO.

A B C D.

$$16 — 12 = 8 \mid 6.$$

• Erit quoque dividendo.

$$\frac{16 \div 4}{\text{feu } 4} — 12 = \frac{8 \div 2}{\text{feu } 2} \mid 6.$$

Id quod multiplicatione probatur
per Theor. 2.

Vel alio modo per prop: 6 hujus

$$\begin{array}{r} 16 — 12 = 8 \mid 6. \\ 12 \qquad \qquad 6 \end{array} \} S$$

$$4 — 12 = 2 \mid 6. \quad Q. D. E.$$

SCHOLIUM.

Cum ratio conversa commode hic inferi possit, sint proportionales.

$$16 — 12 = 8 \mid 6.$$

Erit convertendo

$$16 — \frac{16 \div 4}{f. \quad 4} = 8 \mid \frac{8 \div 2}{f. \quad 2}.$$

Quia nim: producta sunt æqualia.
per Theor: 2.

Pro.

PROPOSITIO XVIII.

Si divisæ quantitates proportionales fuerint, illæ quoque compositæ proportionales erunt.

DEMONSTRATIO.

A B C D.

$$4 - 12 = 2 \mid 6$$

Erit componendo.

$$\frac{4+12}{f. 16} - 12 = \frac{2+6}{f. 8} \mid 6$$

Per Theor: 2. cum producta sint æqualia.

Aliter per prop. 2. hujus.

$$\begin{array}{r} 4 - 12 = 2 \mid 6 \\ 12 \qquad \qquad 6 \end{array} \} A.$$

$$16 - 12 = 4 \mid 6$$

PROPOSITIO XIX.

Vide propos. 5. quæ cum hac est eadem.

PROPOSITIO XX.

Hac demonstrabitur post pr. 22.

Pro-

PROPOSITIO XXI.

Et hæc post propof. 23.

PROPOSITIO XXII.

Si fuerint quotcunque quantitates A. B. C. & aliæ numero æquales D. E. F. fuerit autem ordinate ut A ad B. sic D ad E : & ut B ad C ita E ad F : illæ ex æqualitate ordinatæ in eadem ratione erunt ; hoc est A ad C. ut D ad F.

DEMONSTRATIO.

Positæ sint quantitates

A : B C.

16 8 4.

D E F.

12 6 3.

Ita ut sit

A B D E.

16 — 8 = 12 1 6.

Et.

B C E F.

8 4 = 6 1 3.

Erit

LIBER QUINTUS. 385.

Erit ex æqualitate ordinata.

$$\begin{array}{cccc} A & C & D & F. \\ 16 & - & 4 & = 12 \mid 3. \end{array}$$

Per multiplicationem extremorum & mediorum juxta Theor: 2.

Alio modo

$$\begin{array}{l} 16 - 8 = 12 \mid 6 \\ \text{vicissim } 16. V, \\ 16 - 12 = 8 \mid 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 8 - 4 = 6 \mid 3. \\ \text{vicissim } 16. V. \\ 8 - 6 = 4 \mid 3. \end{array}$$

Atqui etiam

$$4 - 3 = 8 \mid 6:$$

Ergo 11. V.

$$16 - 12 = 4 \mid 3.$$

Et vicissim 16. V.

$$\begin{array}{cccc} A & C & D & F. \\ 16 & - & 4 & = 12 \mid 3. \end{array}$$

Hisce sic demonstratis dicit propositio 20.

Si prima A fuerit < tertia C, etiam quartam D fore < sextam F.

Si A sit ∞ C. fore D ∞ F.

Si A sit > C. fore D > F.

Quæ omnia ex prop; 14 patent si ultima proportio permutetur ut sit

$$16 - 12 = 4 \mid 3.$$

Ccc

Pro.

PROPOSITIO XXIII.

Si fuerint tres quantitates A. B. C, & aliae tres D. E. F, fuerit autem perturbate ut A ad B ita E ad F; & ut B ad C ita D ad E: illae ex aequalitate perturbata in eadem ratione erunt sc. A erit ad C ut D ad F.

DEMONSTRATIO.

Positæ sint quantitates A B C.

16 8 2.

D E F.

24 6 3.

Ita ut fit

16 — 8 = 6 · 1 3.

Et

8 — 2 = 24 1 6.

Erit ex æquo

16 — 2 = 24 1 3.

Quia multiplicando acquiruntur producta æqualia. Ergo per Theor. 2., illæ quantitates proportionales.

Alio

Alio modo

$$\begin{array}{l|l} 16 - 8 = 6 \mid 3. & 8 - 2 = 24 \mid 6. \\ \text{Ergo Theor. I.} & \text{Theor. I.} \\ 3 \cdot x \cdot 16 \propto 8 \cdot x \cdot 6. & 8 \cdot x \cdot 6 \propto 2 \cdot x \cdot 24. \end{array}$$

Ergo per Ax. I.

$$3 \cdot x \cdot 16 \propto 2 \cdot x \cdot 24.$$

Adaeoque per Theor. 2.

$$\begin{array}{cccc} A & C & D & F. \\ 16 & - & 2 & = 24 \mid 3. \end{array}$$

Quibus positis dicit propositio 21.

Si sit prima A < tertia C, etiam
quantam D fore majorem sexta F.

Si A sit \propto C, fore D \propto F.

Si A sit $>$ C, fore D $>$ F.

Quæ omnia rursus ex 14.V. patent,
si ultima proportio permutetur, ut sit

$$16 - 24 = 2 \mid 3.$$

PROPOSITIO XXIV.

*Hæc est eadem cum prop. 21
quæ videri potest.*

PROPOSITIO XXV.

Si quatuor quantitates A. B. C. D. proportionales fuerint: maxima A simul cum minima D. reliquis duabus B. C. simul sumptis majores erunt.

DEMONSTRATIO.]

A B C D

$$12 \text{ — } 4 = 9 \quad 1 \quad 3.$$

Permutando 16. V.

$$12 \text{ — } 9 = 4 \quad 1 \quad 3.$$

dividendo 17. V.

$$12 < 4 \text{ ex hyp.}$$

Ergo $9 < 3$. 14. V.

$$3 \text{ — } 9 = 1 \quad 1 \quad 3.$$

Atqui $9 < 3$.

Ergo $3 < 1$. A. Duæ ultimæ.

$$9 \div 3 \propto 9 \div 3. \quad C. D.$$

$$12 \div 3 < 4 \div 9.$$

Hoc est A & B simul $<$ B & C.

Q. E. D.

Reliquæ sequentes novem propositiones non sunt Euclidis; possunt tamen, eadem, qua præcedentes Euclidis, facilitate demonstrari.

PRO-

PROPOSITIO XXVI.

Si prima A ad secundam B habuerit maiorem rationem quam tertia C ad quartam D, habebit invertendo quarta D ad tertiam C maiorem rationem quam secunda B ad primam A.

DEMONSTRATIO.

A . B C D.

Sit 8 — 4 < 5 | 3.

Erit per Theor. 3.

3 · x · 8 < 5 · x · 4.

Ergo per Theor. 4.

3 — 5 < 4 | 8.

Q. E. D.

PROPOSITIO XXVII.

Si prima A ad secundam B habuerit maiorem rationem, quam tertia C ad quartam D, habebit quoque vicissim prima A ad tertiam C, maiorem rationem quam secunda B ad quartam D.

DEMONSTRATIO.

A B C D.

Sit $8 \text{ — } 4 < 5 \text{ — } 1 \text{ — } 3.$

Erit $8 \cdot x \cdot 3 < 5 \cdot x \cdot 4$ Th:3.

Ergo per Theor: 4.

$8 \text{ — } 5 < 4 \text{ — } 1 \text{ — } 3.$

Q. E. D.

PROPOSITIO. XXVIII.

Si prima A ad secundam B habuerit maiorem rationem quam tertia C ad quartam D. habebit quoque composita prima cum secunda ad ipsam secundam B maiorem rationem quam composita tertia cum quarta ad ipsam quartam D.

DEMONSTRATIO.

A B C D.
Sit 8 — 4 < 5 1 3.

Erit quoque

$$\frac{8 \cancel{+} 4}{\text{feu } 12} - 4 < \frac{5 \cancel{+} 3}{\text{feu } 8} 1 3.$$

Quia productum extremorum est majus producto mediorum. per Theor: 4.

Aliter.°

$$\left. \begin{array}{l} \frac{8}{4} < \frac{5}{3} \\ \frac{4}{4} \propto \frac{3}{3} \end{array} \right\} A.$$

$$\frac{12}{4} < \frac{8}{3} \text{ Ax. 4.}$$

Hoc est 12 — 4 < 8 1 3.

Pro-

PROPOSITIO XXIX.

Si prima A ad secundam B habuerit maiorem rationem quam tertia C ad quartam D, habebit dividendo prima minus seu dempta secunda, ad ipsam secundam B maiorem rationem, quam tertia minus seu dempta quarta ad ipsam quartam D.

DEMONSTRATIO.

A B C D.
Sit 12 — 4 < 8 | 3.

Erit quoque

$$\frac{12 \div 4}{\text{seu } 8} - 4 < \frac{8 \div 3}{\text{seu } 5} | 3.$$

Per Theor. 4. Quia productum extremorum est majus producto mediorum,
Vel etiam hoc modo,

$$\begin{array}{r} \frac{12}{4} < \frac{8}{3} \\ \frac{4}{4} < \frac{3}{3} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} \frac{12}{4} \\ \frac{4}{4} \end{array}} \right\} \\ \hline \frac{8}{4} < \frac{5}{3} \text{ per Ax:5}$$

Hoc est 8 — 4 < 5 | 3. Q. E. D.

Pro-

PROPOSITIO XXX.

*Si prima A ad secundam B majorem habuerit rationem, quam tertia C ad quartam D; habebit per rationis conversionem, prima ad ipsam primam minus seu dem-
pta secunda majorem rationem quam tertia ad ipsam tertiam minus quarta.*

DEMONSTRATIO.

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D. \\ 12 & — & 4 & \leq 8 \mid 3. \end{array}$$

Demonstrandum est quod sit

$$\begin{array}{ccc} 12 & — & 12 \div 4 > 8 \mid 8 \div 3. \\ & & \text{seu } 8 & & \text{seu } 5. \end{array}$$

Id quod patet ex multiplicatio-
tionem ; quia nim. productum
extremorum est minus producto
mediorum. per Theorema 6.

D d d

Pro.

PROPOSITIO XXXI.

Si fuerint tres quantitates A. B. C. & aliæ tres D. E. F. sitque major ratio primæ priorum A ad secundam B, quam primæ posteriorum D ad suam secundam E: ut & major ratio secundæ priorum B ad suam tertiam C, quam secundæ posteriorum E ad suam tertiam F: Erit quoque ex æqualitate ordinata major ratio primæ priorum A ad suam tertiam C, quam primæ posteriorum D, ad suam tertiam F.

DEMONSTRATIO.

	A		B		C
	16		8		4
	D		E		F.
	9		5		3.
Sit	16	—	8	<	9 5.
Et	8	—	4	<	5 3.

Erit ex æquo.

$$16 \text{ — } 4 < 9 \text{ | } 3.$$

Id

LIBER QUINTUS. 395

Id quod patet ex multiplicatione,
cum productum extremorum sit majus
producto mediorum, per Theor: 4.

Aliter.

$$16 \text{ — } 8 < 9 \text{ } 1 \text{ } 5.$$

vicissim. 27. V.

$$16 \text{ — } 9 < 8 \text{ } 1 \text{ } 5.$$

Et

$$8 \text{ — } 4 < 5 \text{ } 1 \text{ } 3.$$

vicissim. 27. V.

$$8 \text{ — } 5 < 4 \text{ } 1 \text{ } 3.$$

Ergo.

$$16 \text{ — } 9 < 4 \text{ } 1 \text{ } 3.$$

Vicissim.

$$16 \text{ — } 4 < 9 \text{ } 1 \text{ } 3.$$

Q. E. D.

PROPOSITIO. XXXII.

*Si sint tres quantitates A. B. C.
 & aliæ tres D. E. F. sitque ma-
 jor ratio primæ priorum A ad suam
 secundam B quam secundæ poste-
 riorum E ad suam tertiam F: ut &
 ratio secundæ priorum B ad suam
 tertiam C major quam primæ po-
 steriorum D ad suam secundam E
 Erit quoque ex æqualitate pertur-
 bata major ratio primæ priorum A
 ad suam tertiam C, quam primæ
 posteriorum D ad suam tertiam F.*

DEMONSTRATIO.

A	B	C
16	8	5
D	E	F.
9	6	4

Sit $16 \div 8 < 6 \div 4.$
 Ut & $8 \div 5 < 9 \div 6.$

Erit ex æquo.

$16 \div 5 < 9 \div 4.$

Per

Per Theor: 4. Quia scilicet productum extremorum est majus producto mediorum.

Alio modo.

$$16 \text{ — } 8 < 6 \text{ l } 4.$$

$$\text{Ergo } 16 \cdot x \cdot 4 < 8 \cdot x \cdot 6.$$

Et

$$8 \text{ — } 5 < 9 \text{ l } 6.$$

$$8 \cdot x \cdot 6 < 5 \cdot x \cdot 9.$$

Ergo.

$$16 \cdot x \cdot 4 < 5 \cdot x \cdot 9.$$

Adeoque $16 \text{ — } 5 < 9 \text{ l } 4.$
per Theor: 4.

PROPOSITIO XXXIII.

*Si fuerit major ratio totius
A ad totum B, quam ablati C
ad ablatum D, erit & reliqui
E ad reliquum F major ratio
quam totius A ad totum B.*

DEMONSTRATIO.

Sint in majori ratione tota

	A.	B.	
	12	6	} S
quam partes	4	3	

Erit 8 — 3 < 12 | 6.

Per Theor: 4. quia productum
extremorum est majus producto
mediorum.

Pro-

PROPOSITIO XXXIV.

Si sunt quotcunque quantitates, A. B. C. & aliae aequales numero D. E. F. sitque major ratio primæ priorum A ad primam posteriorum D, quam secundæ B ad secundam E: ut & secundæ B ad secundam E major, quam tertiæ C ad tertiam F, & sic deinceps.

1. *Habebunt omnes priores, simul A. B. C. ad omnes posteriores simul D. E. F. majorem rationem, quam omnes priores B. C. relicta prima A, ad omnes posteriores E. F. relicta quoque prima D.*

2. *Minorem autem quam prima priorum A ad primam posteriorum F.*

3. *Ma-*

3. *Majorem denique quam ultima priorum C ad ultimam posteriorum F.*

DEMONSTRATIO.

Positæ sint quantitates

Priores

Posteriores.

A 12

D 6

B 8

E 5

C 4

F 3.

Summæ 24.

14.

P A R S I.

B + C E + F.

24 — 14 < 12 1 8.

P A R S II.

A . D.

24 — 14 > 12 1 6.

P A R S III.

C F.

24 — 14 < 4 . 3.

Partis I & 3 demonstratio pendet ex Theoremate 4. quia producta extremorum sunt majora productis mediorum.

Pars vero 2 demonstratur per The. 6, quia productum extremorum est minus producto mediorum.

FINIS LIBRI QUINTI.

Eu-

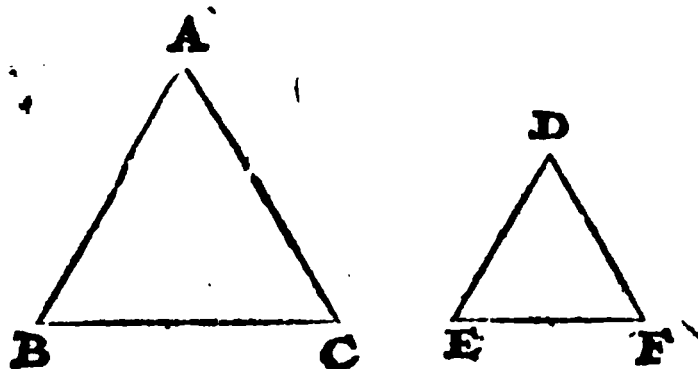
EUCLIDIS

ELEMENTORUM

LIBER SEXTUS.

DEFINITIONES.

1. *Similes figuræ rectilineæ sunt, quæ & angulos singulos singulis æquales habent, atque etiam latera, quæ circum angulos æquales sunt, proportionalia.*



AD constituendam figurarum rectilinearum similitudinem requiruntur duæ conditiones.

1. Ut singuli singulis inter se sint æquales anguli A & D: B. & E: C & F.

2. Ut latera circum istos æquales angulos sint proportionalia, scil.

E e e

Circa

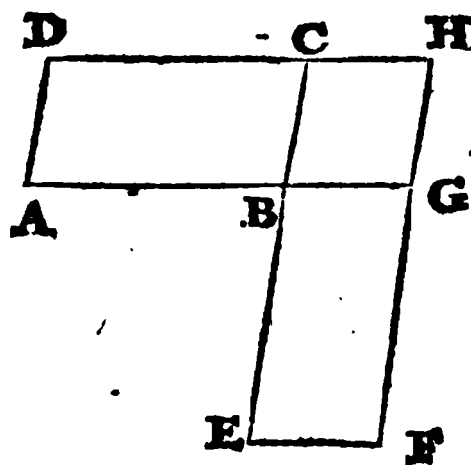
Circa A. D $BA \text{ --- } AC = FD \text{ I } DF.$

Circa B. E $CB \text{ --- } BA = FE \text{ I } ED.$

Circa C. F $BC \text{ --- } CA = EF \text{ I } FD.$

Ergo si una ex hisce conditionibus deficiat, figuræ nullo modo erunt similes: quemadmodum quadratum & altera parte longior figura, licet habeant omnes angulos æquales, utpote rectos, quia vero latera non habent proportionalia, similia dicenda non sunt.

2. *Reciprocae figuræ sunt, cum in utraque figura antecedentes & consequentes rationum termini fuerint.*



Quemadmodum in parallelogrammis AC. BF. & ductis diagonalibus in triangu-

gulis ABC. BEF. si sit AB in prima figura ad BG secundæ, sicut reciproce EB secundæ ad BC primæ, illæ dicuntur reciprocæ.

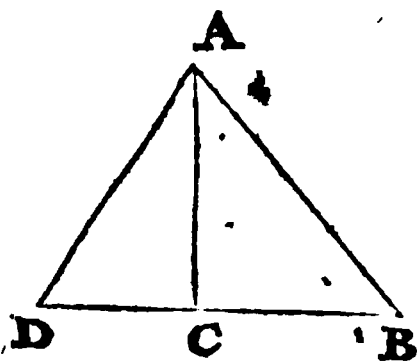
3. *Recta AB dicitur secta esse secundum extremam & mediam rationem, cum fuerit ut tota AB ad majus segmentum AC. ita idem majus segmentum AC ad minus segmentum CB.*



In propositione 11. Libri II. Euclides docuit secare lineam ita ut \square sub tota linea AB & minori segmento CB comprehensum sit æquale \square majoris segmenti AC: quod unum & idem esse cum hac Definitione videri potest ex prop: 30. VI Unde patet 11. II. hic inter Definitiones reponi.

Cæterum ob multiplicem illius usum Geometris hæc proportio divina dicitur.

4. *Altitudo cujusque figure est linea perpendicularis AD, ab illius vertice ad ipsam basin vel illius productam demissa.*



Cum mensura cujusque rei debeat esse certa determinata, non vero vaga & incerta, & distantia puncti alicujus verticalis a linea opposita per certam, & sibi semper æqualem ac minimam mensurari debet lineam. Sic distantia puncti verticalis A a linea seu basi DB, non mensuranda est juxta lineas oblique ductas AD, AB, quia illæ quasi infinitæ duci possunt, nec inter se æquales sunt; sed solummodo per lineam perpendiculariter ductam AC, quæ est certa, unica & minima: quæ hoc in casu semper quæritur. Et hæc perpendicularis AC. dicitur altitudo trianguli ADB, sumpta DB pro basi: quemadmodum sumpta AD pro
basi:

basi, perpendicularis ex B ad AD ducta altitudinem exhibebit: ut & sumtâ AB pro basi faciet perpendicularis ex D ad AB demissa.

Quia vero per punctum A duci potest linea parallela ipsi DB, illa altitudo dicitur esse in iisdem parallelis; unde si duo triangula sint in eadem altitudine idem est ac si dicantur esse in iisdem parallelis. ut loquitur Euclides Lib. I.

5. Ratio ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter se multiplicatæ, aliquam effecerint rationem.

Supra notavimus rationem nihil aliud revera esse quam modum continendi quo una quantitas aliam quantitatem continet vel ab alia continetur; quique non clarius, quam per fractionem exprimitur.

Si ergo datæ sint duæ rationes 2 ad 3, & 4 ad 5, illæ ad fractiones redactæ sic stabunt $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5}$, quæ si inter se multipli-

centur, obtinebitur $\frac{8}{15}$ seu ratio 8 ad 15, pro quæsitâ ratione quæ ex duabus datis

composita est. Sic ratio quæ ex dupla & tripla, seu ex duabus rationibus 2 ad 1 & 3 ad 1, hoc est ex duabus fractionibus $\frac{2}{1}$ & $\frac{3}{1}$ composita est, habebitur $\frac{6}{1}$ seu ratio 6 ad 1 seu sextupla. Et sic porro de aliis.

Notandum autem est rationum ab Euclide sic dictas quantitates Geometris vulgo dici Denominatores, quæ in fractionum consideratione quotientum nomine venire solent.

Sed minime omittendum putamus rationem $\frac{8}{15}$ seu 8 ad 5 (quæ ex rationibus $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5}$ seu 2 ad 3 & 4 ad 5 componitur) etiam hoc modo posse inveniri.

Fiat $2 \text{ — } 3 =$ quilibet numerus 6 | 9.

Tum $4 \text{ — } 5 = 9 \frac{45}{4}$

Dico rationem 6 ad $\frac{45}{4}$ seu utrinque per eundem numerum 4 multiplicando 24 ad 45 esse eandem cum ratione 8 ad 15. Si enim fractio $\frac{24}{45}$ per 3 reducatur ad minimam,

obtinebitur $\frac{8}{15}$ ut requiritur; unde
patet

patet rationem 6 ad $\frac{15}{4}$ esse compositam ex
duabus rationibus 2 ad 3 & 4 ad 5.

A —————

B ———

C —————

D ———

H —————

I ———

K —

Quæ omnia lineis hac ratione applicari
possunt. Datae sint duæ rationes A ad B.
& C ad D, rationem ex istis duabus
compositam hoc modo inveniemus.

Fiat A — B = H I I.

Ut & CD — D = I I K.

Ratio H ad K exhibebit rationem com-
positam quaesitam.

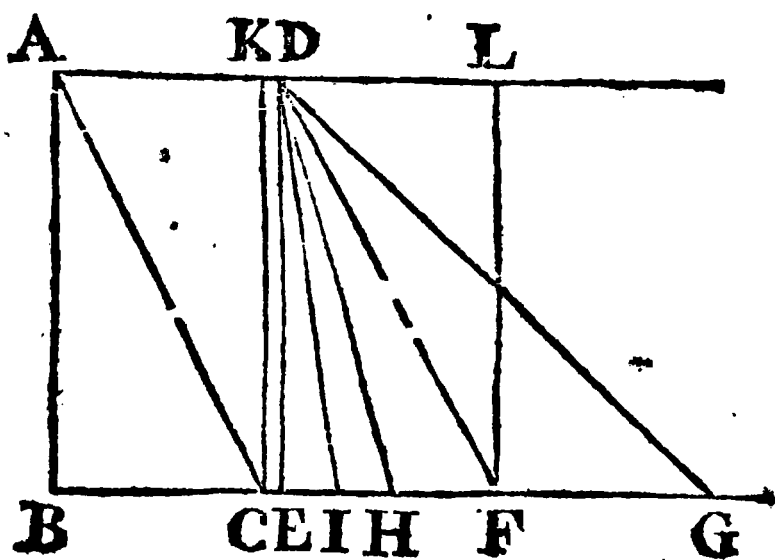
Pro H assumere licet quamlibet cunque
lineam.

Pro-

Theor. 1.

PROPOSITIO I.

Triangula ABC. DEF. & parallelogramma BK. EL, in eadem altitudine sive inter easdem parallelas constituta, sunt inter se ut bases BC. EF. hoc est si bases sint æquales figuræ erunt æquales: si bases inæquales figuræ erunt inæquales & quidem juxta rationem basium.



DEMONSTRATIO.

I. Sit basis $BC \propto EF$. Tum triangula ABC. DEF, inter easdem parallelas & super basibus æqualibus constituta inter se sunt æqualia, 2. Po-

2. Ponatur EG dupla ipsius EF, seu BC. Tum erunt duo DEF. DFG ^a æqualia: adeoque totum DEG duplum ipsius DEF hoc est ABC: quia nim. basis EG est dupla ipsius BC.

3. Ponatur EH dimidia baseos EF seu BC. adeoque $\frac{1}{4}$ EG. Erunt duo triangu-
gula DEH. DHF ^a æqualia: ergo DEH erit semissis ipsius DEH, hoc est ABC: & quarta pars ipsius DEG.

4. Ponatur EI $\propto \frac{1}{2}$ EH. seu $\frac{1}{4}$ EF. seu $\frac{1}{8}$ EG. similiter erit triangulum ^a DEI \propto DIH. adeoque DEI erit $\propto \frac{1}{2}$ DEH. seu $\frac{1}{4}$ DEF hoc est ABC. seu $\frac{1}{8}$ DEG.

Et sic potro in infinitum.

Ergo absolute triangu-
la se habent ut il-
lorum bases:

Similiter etiam parallelogramma, cum
dupla ^b sunt triangulorum.

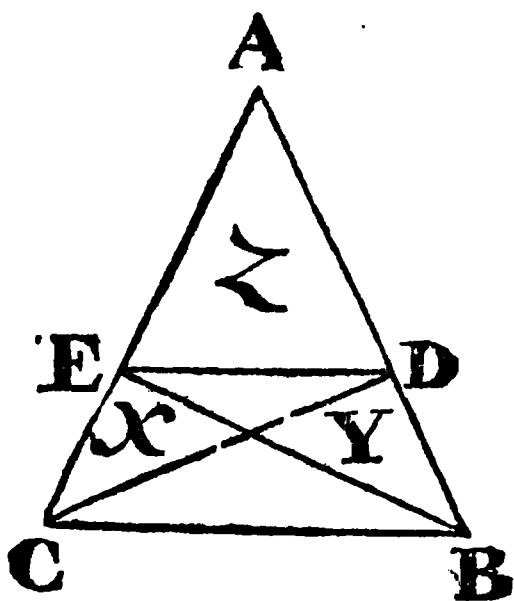
^b 39. I.

Theor. 2.

PROPOSITIO II.

1. Si in triangulo uni lateri CB parallela ducatur ED , hæc proportionaliter secabit latera AC AB . (hoc est ut sit $AE - EC = AD / DB$.)

2. Et si recta ED secuerit latera AC . AB proportionaliter, erit illa reliquo lateri CB parallela.



DEMONSTRATIO.

1 Pars. Ducantur rectæ CD . BE . eruntque triangula X & Y in iisdem parallelis DE . CB & eadem basi ED , ergo inter se æqualia. Triang.

$$\text{Tri. Z} \text{ — } \text{Tri. X}^b \text{ — } \text{bas: AE / bas: EC. b 1. VI.}$$

seu Y

Atqui etiam

$$\text{Tr: Z} \text{ — } \text{Tr: Y}^b \text{ — } \text{bas: AD / bas: DB.}$$

$$\text{Ergo c AE — EC — AD / DB. c 11. V.}$$

2 Pars. Est ex hypothesi.

$$\text{AE — EC — AD / DB.}$$

Atqui

$$\begin{array}{l} \text{AE — EC — Z / . X .} \\ \text{Et AD — DB — Z / . Y .} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{AE — EC — Z / . X .} \\ \text{Et AD — DB — Z / . Y .} \end{array}} \right\} \text{I. VI.}$$

Ergo hisce rationibus substitutis.

$$\text{Erit Z — X — Z / . Y .}$$

Adeoque ^d triang. X ∞ Y & quia ^{d 14. V.}
sunt in eadem basi ED, erunt inter ^{c pa.}
parallelas ED. CB. ^{c 39. I.}

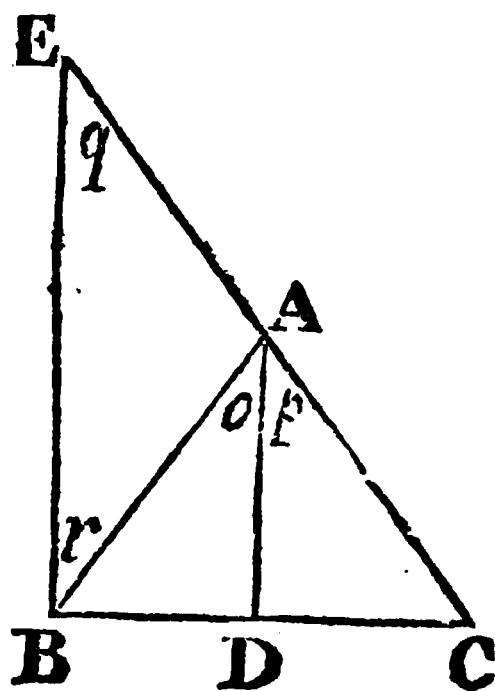
Q. E. D.

Theor. 3.

PROPOSITIO III.

1. Si in triangulo ABC , recta AD angulum A bifariam secans, etiam secet basin BC , habebunt basis segmenta BD . DC eandem rationem, quam reliqua latera BA . AC .

2. Et si basis segmenta BD . DC eandem habeant rationem quam reliqua latera BA . AC , recta AD . basin secans, etiam angulum oppositum A secabit bifariam.



De

DEMONSTRATIO.

Pars I. Ex B ducatur BE parallela ^{a 31. I.} DA, & producat CA, usque ad occursum perpendicularis in E: eruntque propter parallelas EB. DA.

Ang. O \propto R. quia sunt alterni. }
Ang. P \propto Q. externus interno } ^{29. I.}

Atqui O \propto P ex hypothesi.

Ergo R \propto Q. Et latus EA ^{b 6. I.} \propto BA.

Quare ^c erit $\frac{EA}{BA} = \frac{AC}{BD/DC}$ ^{c 2. VI.}

PARS II.

Est $\frac{BA}{AC} = \frac{BD}{DC}$. ex h. ^{d 2. VI.}

Atqui ^d $\frac{EA}{AC} = \frac{BD}{DC}$.

Ergo II. V.

$\frac{BA}{AC} = \frac{EA}{AC}$.

^{e 14. V.}
^{f 5. I.}

Adeoque ^e BA \propto AE & ang. R ^f \propto Q.

Atqui ang. R \propto O | ^{29. I.}

Ut & Q \propto P |

Ergo O \propto P.

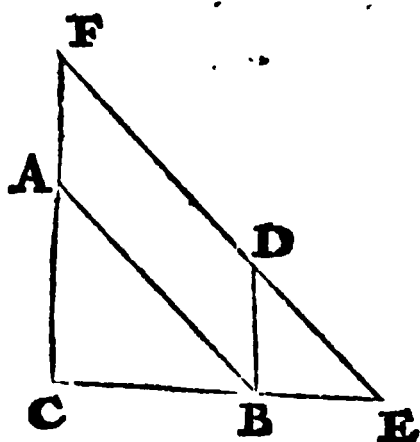
Q. E. D.

Theor. 4.

PROPOSITIO IV.

a Def.
1. VI.

*Triangula sibi mutuo equi-
angula, sunt similia; hoc est
etiam latera circa equales an-
gulos habent proportionalia.*



DEMONSTRATIO.

b 28. I.

Bases CB, BE colloca in di-
rectum: quia jam angulus ACB
 \propto DBE, ex hypothesi, erunt^b
CA & BD parallelæ, ut & AB
DE. quia ang. ABC etiam po-
nitur \propto E.

Pro-

LIBER SEXTUS. 415

Producantur CA & ED in F,
eritque AFDB parallelogram-
mum, adeoque FA^c ∝ DB & ^{c 34. I.}
FD ∝ AB.

Quia in triangulo FCE latus
AB est parallelum FE erit ^d d 2. VI.

$$\frac{AC - AF}{DB} = CB / BE.$$

Et permutando. 16. V.
AC — CB = DB / BE.

Deinde

Quia in triangulo EFC latus
DB est parallelum FC.

$$\frac{\text{Erit } FD^d}{AB} = DE = CB / BE.$$

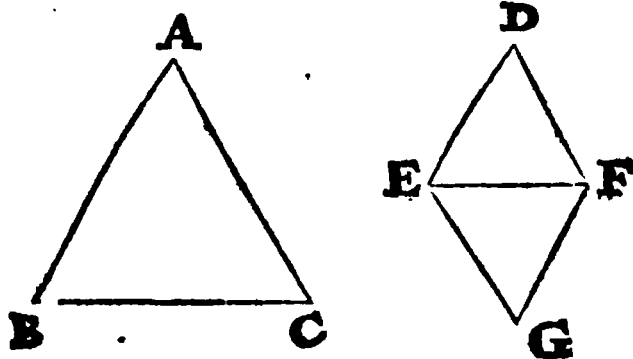
Et vicissim. 16. V.
AB — BC = DE / EB.

Pro-

Theor. 5.

PROPOSITIO V.

*Si duo triangula $ABC. DEF$,
latera circa omnes angulos habeant
proportionalia, erunt æquiangu-
la, eosdem angulos $A \& D$, $B \&$
 E , $F \& C$ habebunt æquales, qui-
bus homologa latera subtenduntur.*



DEMONSTRATIO.

Ad punctum E fiat \angle angulus
FEG \propto B. ut & ad punctum F
angulus EFG \propto C. eritque ter-
tius G æqualis tertio A.

Quare in triangulis similibus
ABC. GEF.

AB

$$AB \text{ --- } BC = GE / EF.$$

Atqui etiam per propositionem.

$$AB \text{ --- } BC = DE / EF.$$

$$\text{Ergo}^b GE \text{ --- } EF = DE / EF.$$

b II. V.

$$\text{Adeoque}^c GE \propto DE.$$

c 14. V.

Eodem modo ab altera parte etiam probatur esse.

$$GF \propto DF.$$

Adeoque triangula DEF. GEF habent omnia latera æqualia, singula singulis. ergo per 8. I.

$$\text{Ang. } DEF \propto GEF \propto B.$$

$$\text{Ang. } DFE \propto GFE \propto C.$$

$$\text{Ang. } D \propto G \propto A.$$

Q. E. D.

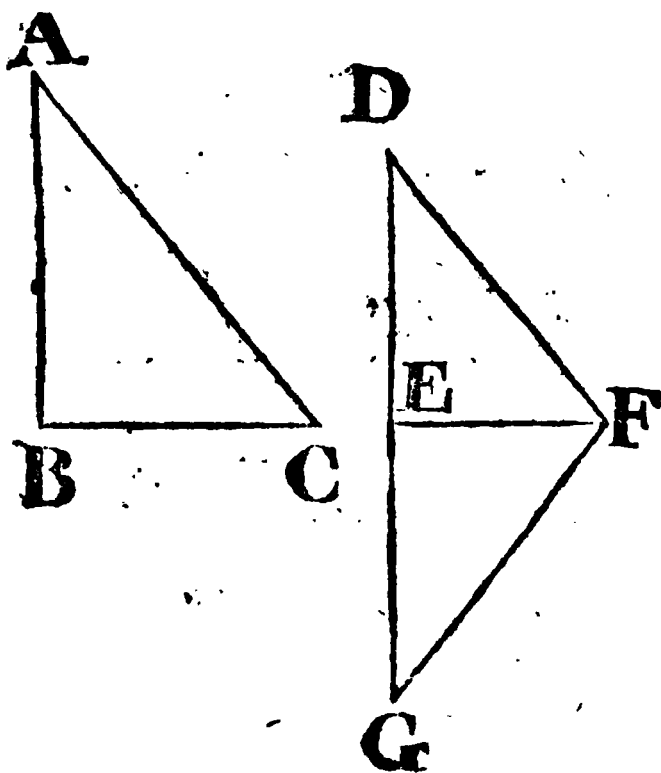
Ggg

Proa

Theor. 6.

PROPOSITIO VI.

Si duo triangula ABC. DEF, habeant unum angulum B, æqualem uni E, & latera circa eum proportionalia, (hoc est AB ad BC ut DE. ad EF) erunt triangula sibi mutuo æquiangula.



De-

DEMONSTRATIO.

Ad puncta E, & F fiant anguli FEG.
 EFG æquales angulis B. (hoc est DEF)
 & C. eritque tertius G æqualis tertio
 a A: Et triangula ABC. GEF similia, ^{a 32. I.}
 b, adeoque ^{b 4. VI.}

$$AB - BC = GE / EF.$$

Atqui etiam per propositionem.

$$AB - BC = DE / EF.$$

$$\text{Ergo } ^c GE - EF = DE / EF. \quad ^c 11. V.$$

$$\text{Adeoque } ^d GE \propto DE. \quad ^d 14. V.$$

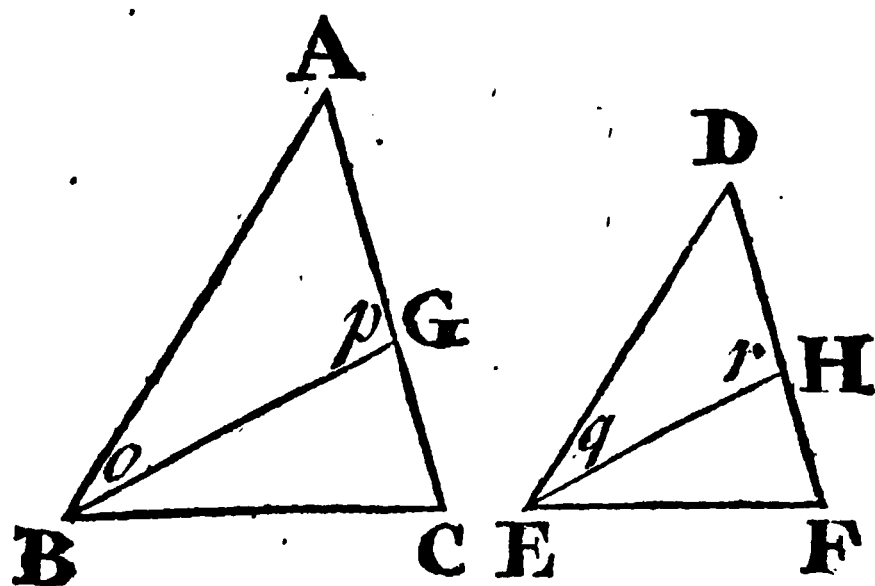
Ergo duo triangula DEF. GEF se
 habent juxta quartam I. adeoque

$$\text{Ang. DEF} \propto \text{GEF} \propto B.$$

$$\text{Ang. DFE} \propto \text{GFE} \propto C.$$

$$\text{Ang. D} \propto G \propto A.$$

Q. E. D.



Datur hic angulus $A \propto D$. & latera
circa eos proportionalia : & tum.

Est vel angulus $B < E$.

Vel $B > E$.

Vel $B \propto E$.

Ponatur I. Angulus $B < E$.

Ducatur BG, ut fiat angulus $O \propto DEF$
eritque $P \propto R$.

Ergo $BA - AG = ED / DF$. 4. VI.

Atqui $BA - AC = ED / DF$ per pro.

Ergo $AG \propto AC$. per 11 & 14. V.
pars & totum.

Eodem modo ducta EH. demonstra-
tur angulum B non esse posse minorem
angulo E. Ergo $B \propto E$ & per 32. I.
 $C \propto F$. Q. E. D.

Pro-

PROPOSITIO VII.

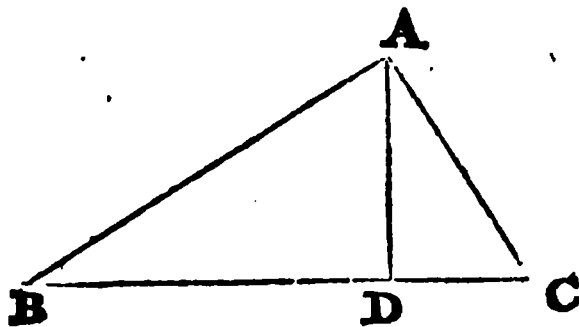
Theor. 7.

Vix ullius est usus.

PROPOSITIO VIII.

Theor. 8.

In triangulo rectangulo ABC, perpendicularis AD ab angulo recto in basin ducta, secat triangulum in duo triacula ADB. ADC quæ erunt & toti & inter se similia.



DEMONSTRATIO.

Pars I. In Triangulis BAC. ADB.

Ang. B est communis.

Ang. BAC \propto ADB quia uterque rectus

^b Ergo C \propto BAD.

Ggg 3

A.

a 4. VI.

Adeoque \triangle triang. BAC ADB. similia.

Deinde in triangulis BAC. ADC.

Ang. C est communis.

Ang. BAC \propto ADC quia uterque rect.

b 32. I.

 \therefore Ergo B \propto CAD.Adeoque \triangle triang. BAC. ADC similia.II. Pars. Triangulum ADB est simile
ipfi BAC.Triangulum ADC est simile eidem
BAC.

Ergo Triangula ADB. ADC inter se
sunt similia per 21. VI. quæ hac non de-
pendet.

COROLLARIUM I.

Perpendicularis ab angulo recto in ba-
sin ducta, est media proportionalis inter
duo basis segmenta.

DEMONSTRATIO.

Duo triangula BDA. ADC, sunt æ-
quiangula.

a 4. VI.

Ergo \triangle BD — DA = DA / DC.

Adeoque DA est media propoitiona-
lis inter BD. DC.

CO.

COROLLARIUM. II.

Utrumlibet laterum angulum rectum comprehendendum est medium proportionale inter totam basin & illud segmentum .basis quod sumpto lateri adjacet.

DEMONSTRATIO.

In triangulis similibus ABC. ADC.

$$BC : CA = AC : CD.$$

Et in triangulis similibus ACB. ADB

$$CB : BA = AB : BD.$$

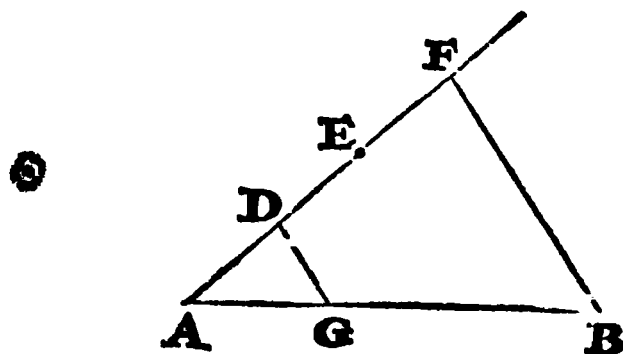
SCHOLIUM.

In deducendis triangulorum proportionibus bene notandum est, ordine procedendum esse ab angulis æqualibus circa æquales angulos ad æquales angulos.

Probl. I.

PROPOSITIO IX.

A data recta AB imperatam partem abscindere.



CONSTRUCTIO.

Sit auferenda pars tertia.

1. Rectæ AB sub quolibet angulo adijunge rectam AF, inque illa sume circino tres partes æquales AD. DE. EF.

2. Ductæ FB ex D ducatur parallela DG.

Dico AG esse quæsitam
ter-

tertiam partem rectæ
AB.

DEMONSTRATIO.

In triangulo FAB lateri FB
parallela est DG.

ergo $FD - DA = BG / GA$. a. 2. VI.

Et componendo 18. V.

$FA - DA = BA / GA$

Atqui FA est tripla ipsius
DA.

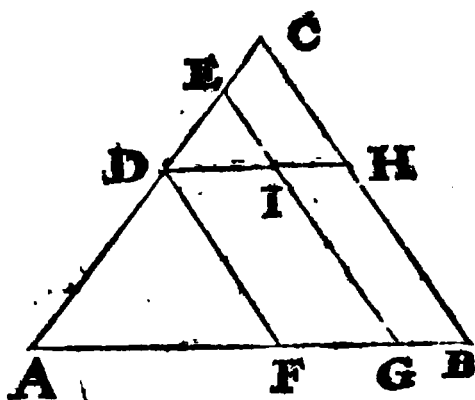
Ergo BA etiam est tripla
ipsius GA.

Adeoque AG est tertia
pars lineæ AB.

PROPOSITIO X.

Probl. 2.

*Datam rectam AB similiter
secare ac data alia recta AC secta
fuerit in D & E.*



CONSTRUCTIO.

1. Jungantur datæ lineæ ad A.
2. Ductâ CB ex punctis D & E ducantur duæ rectæ DF. EG parallelæ ipsi CB.

Dico factum esse quod quæritur.

DEMONSTRATIO.

30. L. In triangulo AEG lineæ EG. DF sunt parallelæ, ^a quia eidem lineæ CB ductæ sunt parallelæ.

Ergo

Ergo $\text{b AF} \text{---} \text{FG} = \text{AD} / \text{DE}$.

Deinde ex D ducta DH parallela AB^o
erit $\text{DI} \propto \text{FG}^c$ & $\text{IH} \propto \text{GB}$.

b 2. VI.

Eritque in triangulo DHC.

c 34. I.

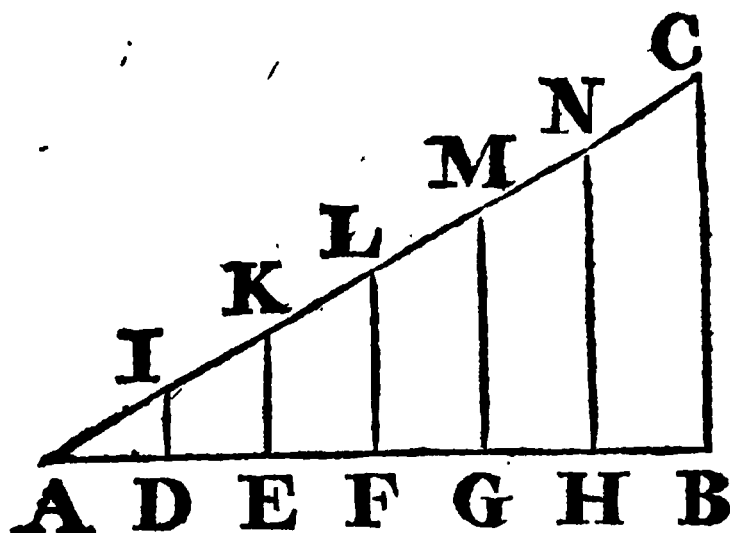
$\text{DI} . \text{f. FG} \text{---} \text{IH} . \text{f. GB} = \text{DE} / \text{EC}$.

Adeoque partes AF FG. GB, sunt
proportionales partibus AD. DE. EC.

Q. E. D.

SCHOLIUM.

Hinc facile patet ratio divi-
dendi lineam datam in quotcun-
que libet partes æquales: sumendo
scilicet in linea datæ adjuncta,
tot partes æquales in quot linea
data dividenda sit: & extre-
mitates lineæ utriusque recta con-
jungendo; si tum a divisionibus
intermediis ducantur rectæ pa-
rallæ lineæ jam ductæ; illæ
quæ sitam facient divisionem. Ex.
Gr: sit linea AB dividenda in sex
partes æquales.



1. Ipſi AB junge ſub quolibet angulo rectam AC.

2. In linea AC ſume ſes partes æquales AI. IK. KL. LM. MN. NC.

3. Duc rectam CB; illique parallelas NA. MG. LF. KE. ID.

Dico lineam AB ſectam eſſe in ſex partes æquales AD. DE. EF. FG. GH. HB.

DEMONSTRATIO.

Per proſitionem 10. linea AB ſecta eſt ſimiliter ac AC.

Atqui linea AC ſecta eſt in ſex partes æquales.

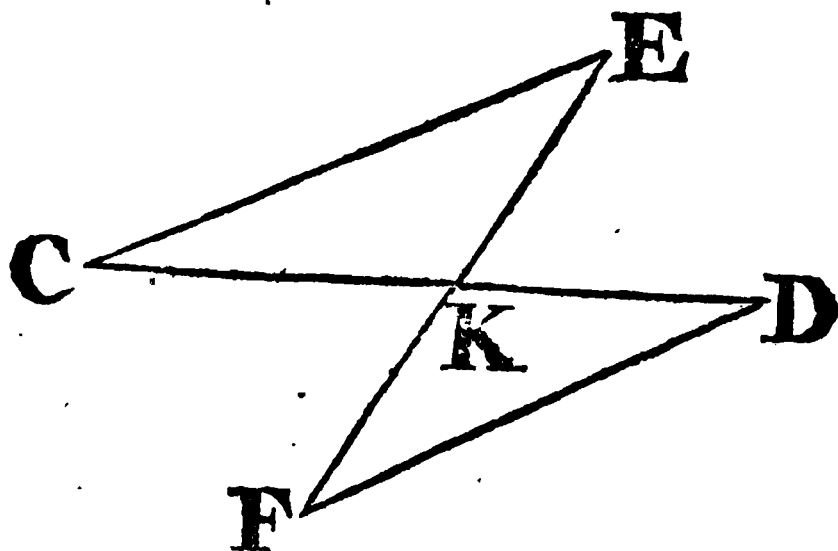
Ergo etiam AB in ſex æquales partes ſecta erit.

SCHOLIUM II.

Haud inconcinne linea data CD poterit dividi in ratione datarum linearum A. B.

Con-

CONSTRUCTIO.



1. Ex C sub quolibet angulo ducatur
recta CE \propto datæ A.

2. Et ex D recta DF, parallela ipsi
CE, & \propto datæ B.

3. Jungatur EF.

Dico rectam CE in K sectam esse in ra-
tione A ad B.

DEMONSTRATIO.

In tri. CKE. DKF

Ang. C \propto D

E \propto F 29. l.

K \propto K

Ergo erit per 4. VI.

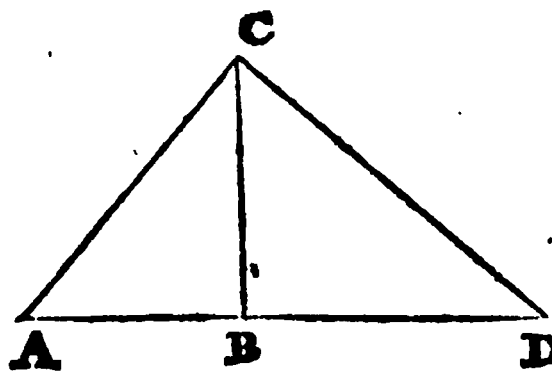
CE. s. A \propto CK \propto DF s. C / DK.

& permutando

A \propto C \propto CK / KD.

Probl. 3.

PROPOSITIO. XI.



*Datis
duabus re-
ctis AB, BC
tertiam pro-
portionalem
invenire.*

CONSTRUCTIO.

1. Datas rectas conjunge in angulo recto ABC.
2. Ad ductæ rectæ AC punctum C excita perpendicularem CD.
3. Lineam AB produc usque ad occursum istius perpendicularis in D.
Dico BD esse quæsitam proportionalem.

DEMONSTRATIO.

21 Cor:
8. VI.

Triangulum ACB est rectangulum per construct. & CB perpendicularis ex angulo recto ad basin ducta: quæ a est mediâ proportionalis inter AB. & BD, Adeoque BD erit tertia quæsitâ.

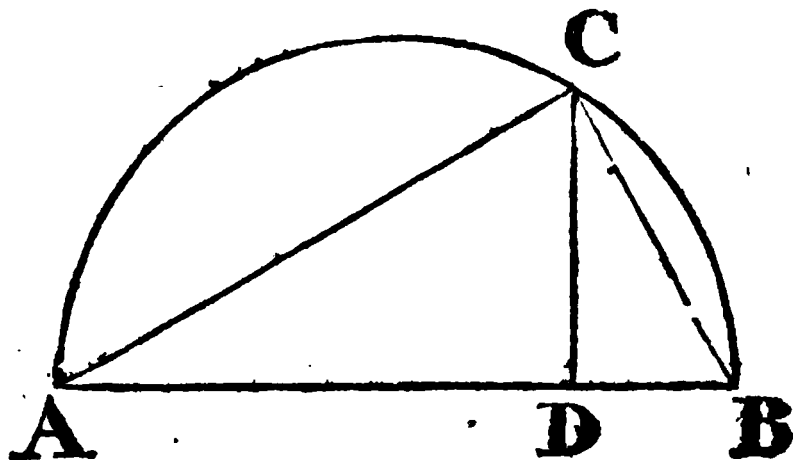
Q. F. E.

Scho.

SCHOLIUM.

Si AB sit major quam BC haud inconcinna erit talis

CONSTRUCTIO.



1. Super AB describe Semicirculum ACB.

2. In illo accommodetur secunda data BC.

3. Ex C demitte perpendicularem CD.

Dico DB esse tertiam proportionalem quæsitam.

DEMONSTRATIO.

Ducta AC erit ACB triangulum rectangulum (31. III.)

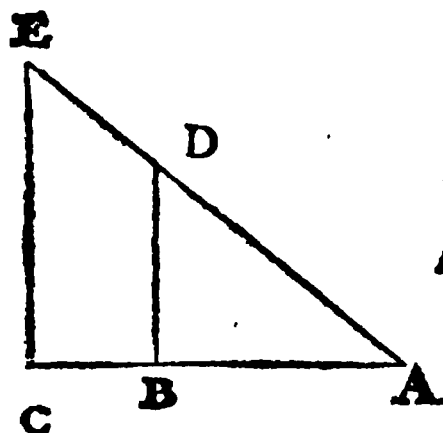
Ergo erit $AB : BC = BC : BD$,
per 2 Cor. 8. VI.

Adeoque BD est tertia quæsitæ.

PRO-

PROPOSITIO XII.

Probl. 4.



*Datis tribus
rectis AB. BC.
AD quartam
proportionalem
DE invenire.*

CONSTRUCTIO.

1. Datarum duas quaslibet cunque AB. BC colloca in directum.
2. Tertiam AD conjunge ad punctum A, & duc rectam DB.
3. Ex C duc CE parallelam BD, quæ productæ AD occurrat in E.

Dico DE esse quæsitam quartam proportionalem.

DEMONSTRATIO.

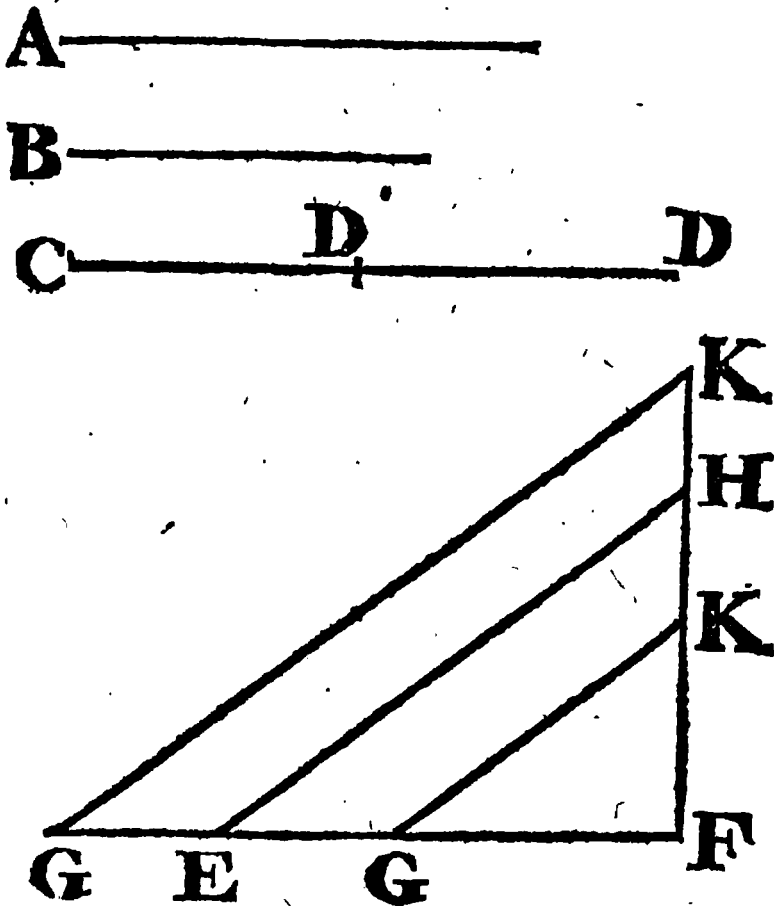
In triangulo ACE lateri CE ducta est parallela BD.

a 2. VL Ergo $AB : BC :: AD : DE$.
Adeoque erit DE quarta proportionalis.

Q. E. F.

Alia

Alia Constructio.



Datæ sint tres lineæ A. B. CD, quæ est vel \angle vel \triangleright A.

1. Lineæ EF \propto A junge FH \propto B sub quolibet angulo, ducaturque EH.

2. In lineæ FE sume FG \propto tertiæ CD. & ex puncto G ducatur GK parallela ipsi EH.

Dico lineam FK esse quartam quæsitam scil. FK supra H, si tertia CD sit major prima A: At vero FK infra H si sit CD \triangleright A.

DEMONSTRATIO.

Facile ex constructione patet triangula EFH. GFK esse similia: quare erit per 4. VI.

$$EF : FH = GF : FK.$$

Hoc est

$$A : B = CD / \text{ad quartam FK.}$$

Q. D. E.

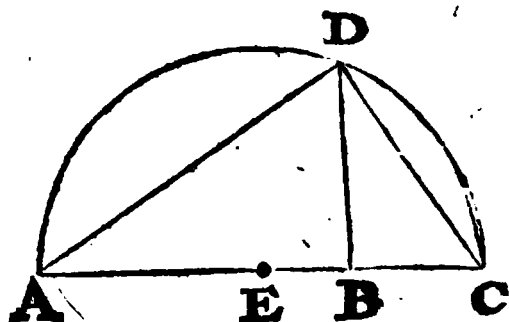
I i i

Pro-

Probl. 5.

PROPOSITIO XIII.

*Datis duabus rectis AB. BC
mediam proportionalem BD in-
venire.*



CONSTRUCTIO.

1. Datas lineas AB. BC collo-
ca in directum.
2. Super tota AC describe Se-
micirculum.
3. Ex B excita perpendicula-
rem BD usque ad Semicirculum.

Dico illam esse mediam quæ-
sitam.

De-

DEMONSTRATIO.

Ductis AD. DC. erit ADC
 triangulum rectangulum quia
 angulus ADC est rectus. Et ^{a31. III.}
 linea DB est perpendicularis
 ex angulo recto ad basin du-
 cta, quæ ^b est media proportio-
 nalis inter AB. BC.

^b r Co-
 roll. 8.
 VI.

Q. F. E.

SCHOLIUM.

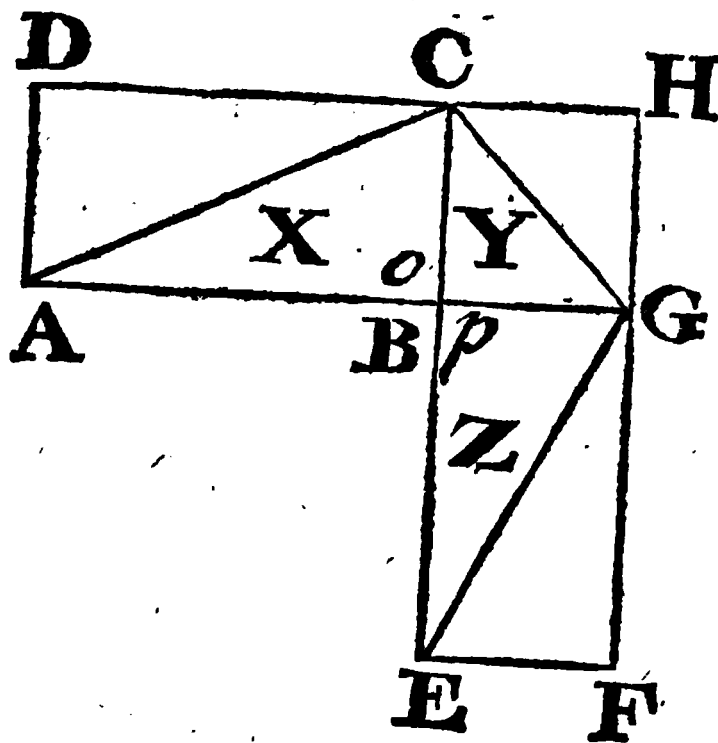
Quævis recta a circumferentia
 ad diametrum perpendiculariter
 ducta, est media proportionalis
 inter segmenta diametri.

Theor. 9.

PROPOSITIO XIV.

1. *Parallelogramma equalia X. Z. quæ unum angulum O uni P æqualem habent; etiam latera circa æquales angulos habent reciproce proportionalia. (hoc est AB ad BG ut EB ad BC.*

2. *Et si latera habent reciproca, parallelogramma sunt equalia.*



De.

DEMONSTRATIO.

1 Pars. Par. ^a X — Par. Y = Z / Par. Y. • 7. V.

Atqui X — Y = AB / BG. }
Et Z — Y = EB / BC. } I. VI.

Ergo substitutis istis rationibus.

AB — BG = EB / BC.

2 Pars. AB — BG = EB / BC.

Atqui AB — BG = X / Y. }
Et EB — BC = Z / Y. } I. VI.

Ergo istis rationibus substitutis.

X — Y = Z / Y.

Adeoq^b Par: X ∞ Par: Z.

^b 14. V.

PROPOSITIO XV.

Theor.

19.

Vide
fig. præ-
ceden-
tem.

1. *Æqualia triângula X. Z, quæ unum angulum O uni angulo P æqualem habent; etiam latera circa æquales angulos habebunt reciproce proportionalia. (hoc est AB ad BG, ut EB ad BC.*

2. *Et si latera sic habent reciproca, triângula sunt æqualia.*

DEMONSTRATIO.

* 34. I.

Ductis rectis AC. CG. GE. hæc est omnino eadem cum præcedente; quoniam ^atriângula sunt semisses parallelogrammorum, & triângula cum parallelogrammis eadem habent latera quæ demonstrationem ingrediuntur.

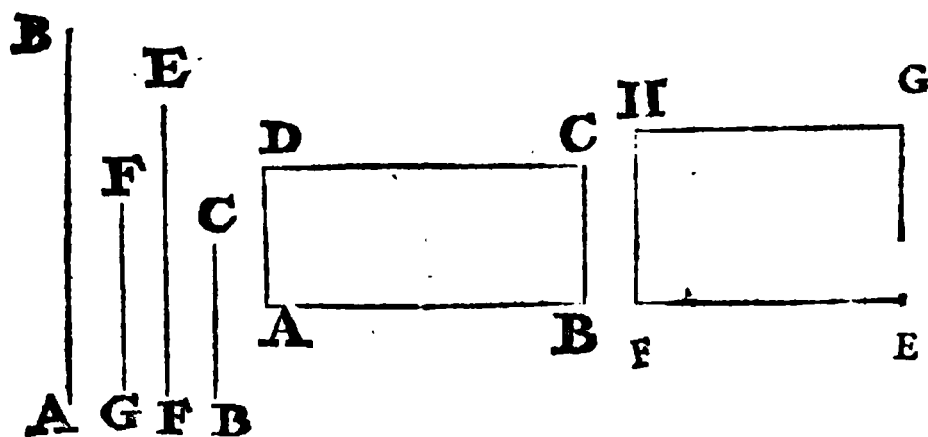
Pro-

PROPOSITIO XVI.

Theor.
II.

1. Si quatuor recte A. G. F. B proportionales fuerint, rectangulum sub extremis A & B. erit æquale rectangulo sub mediis.

2. Et si rectangulum sub extremis sit æquale rectangulo sub mediis, illa quatuor recte proportionales erunt.



DEMONSTRATIO.

1 Pars Fiat $\square AC$ sub extremis & FG sub mediis : illa habent angulum $A \propto F$, & latera reciproca, nimir: $AB \text{ — } HF = \text{reciproce } FE / BC$. Ergo illa \square la sunt æqualia.

a 14. VI.

2 Pars. \square la AC. FG habent angulum $A \propto F$. & sunt æqualia: b Ergo b 14. VI. habent latera reciproce proportionalia.

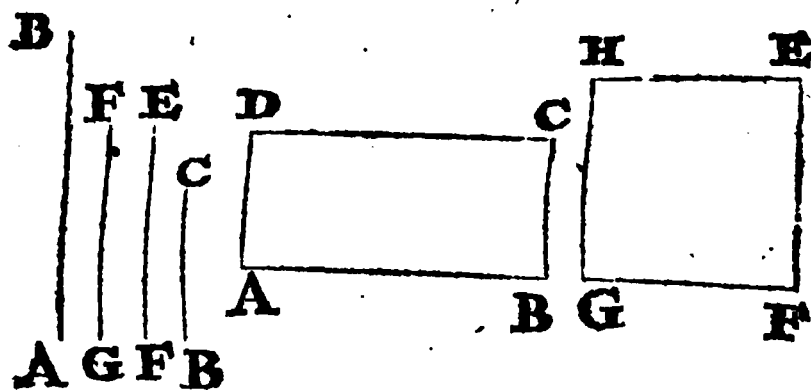
Pro-

PROPOSITIO XVII.

Theor.
12.

1. Si tres lineæ A . F . B . proportionales fuerint, rectangulum sub extremis A & B erit æquale quadrato mediæ F .

2. Et si rectangulum sub extremis sit æquale quadrato mediæ, tres illæ rectæ proportionales erunt.



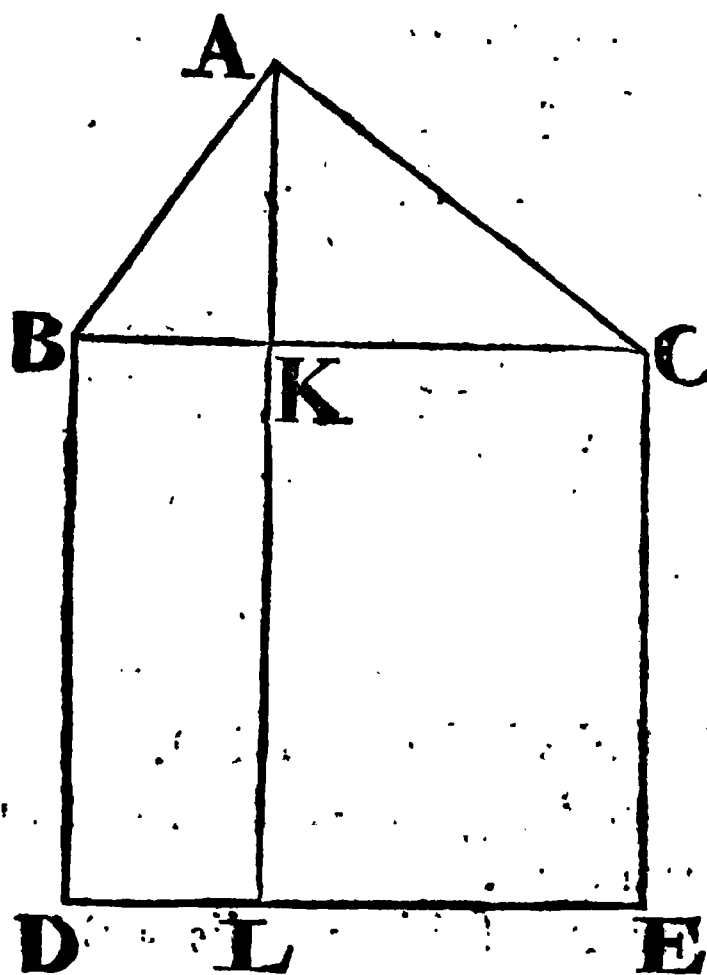
DEMONSTRATIO.

1 Pars. Fiat sub extremis $\square AC$, & a mediæ $\square GE$. Quæ quia habent angulum $A \propto G$ & latera reciproca scilicet $AB - GF = FE$. hoc est GF / BC . erunt inter se æqualia.

2 Pars. $\square AC$. GE sunt æqualia & habent angulum $A \propto G$. Ergo^a habent latera reciproca.

Pro-

LIBER SEXTUS. 242
SCHOLIUM.



Ex hac
proposita
& præce-
dente 8
facillime
demon-
stratur
Pr. 47. I.
hoc mo-
do,

PRÆPARATIO.

Super BC constituatur \square BE, & ex
A ducatur AL parallela BD vel CE.

DEMONSTRATIO.

Lineæ BC. AC. CK sunt proportio-
nales. per 8. VI.

$$\text{Ergo } \square BC. CK \propto \square AC. \\ \square EK.$$

Deinde Lineæ BC. AB. BK. sunt proportionales.

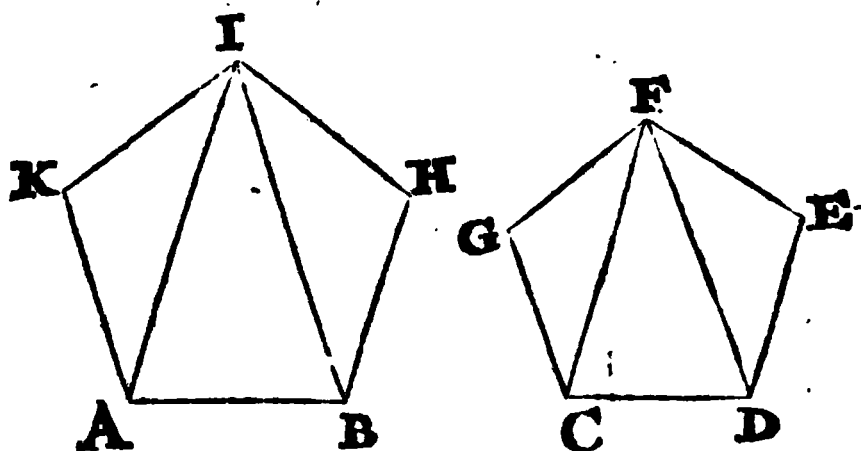
$$\text{Ergo } \square BC. BK \propto \square AB. \\ \square LB. \quad 17. VI. A.$$

Supra $\square EK \propto \square AC$

$$\therefore \square EK \text{ --- } LB \propto \square AB \text{ --- } \square AC, \\ \square EB \quad K k k \quad \text{Pro}$$

PROPOSITIO XVIII.

Probl. 6. *Super data recta AB describere polygonum ABHIK, quod dato polygono CDEFG sit simile similiterque positum.*



CONSTRUCTIO.

1. Datum Polygonum rectis FC. FD divide in triacula.

a 32. I. 2. Super AB factis \angle BAI. ABI \angle equalibus \angle DCF. CDF. erit b tertius \angle equalis tertio. adeoque c tri-
b 32. I.
c 4. VI. angulum IAB simile triangulo FCD.

3. Eodem modo super lateribus IA. IB, fiant triacula IKA. IHA. \angle equian-
gula, adeoque & similia triangulis FGC, FED.

Dico ABHIK esse polygonum quæsitum.

DEMONSTRATIO.

Pro, \angle angulis.

Facile patet per constructionem \angle angulos

los unius polygoni esse æquales angulis alterius. nim.

K ∞ G.

Tres ad I ∞ ad F tribus.

H ∞ E

Duo ad B ∞ ad D duobus.

Duo ad A ∞ ad C duobus.

Ergo omnes anguli sunt æquales, adeoque duo polygona sunt æquiangula, & similiter posita.

Pro lateribus.

In triangulis similibus IKA. FGC: ut & IAB. FCD.

Erit $KA - AI = GC / CF.$
Et $BA - AI = DC / CF.$ 4. VI.

Erit per 11. & 16. V.

$KA - AB = GC / CD.$

Deinde in triangulis similibus IAB. FCD: ut & IHB. FED.

Erit $AB - BI = CD / DF.$
Et $HB - BI = ED / DF.$ 4. VI.

Ergo per 11 & 16. V:

$AB - BH = CD / DE.$

Et eodem modo demonstratur latera circa reliquos angulos esse proportionalia: Ergo polygona sunt similia.

Q. E. D.

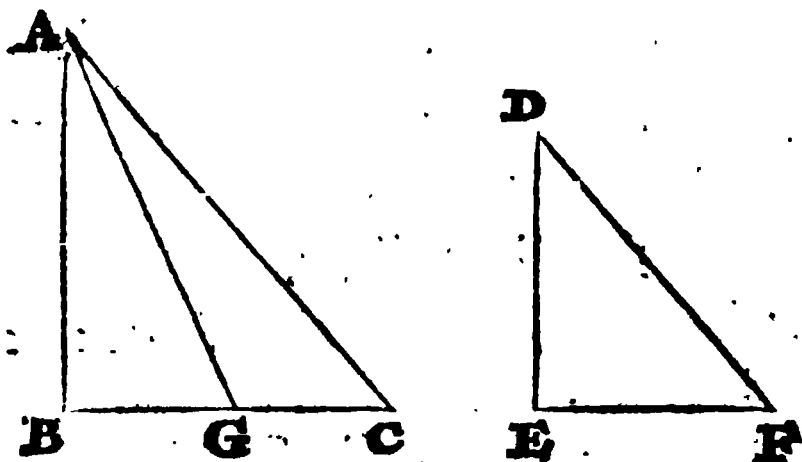
K k k 2

Pro-

Theor. 13

PROPOSITIO XIX.

*Similia triângula ABC. DEF
inter se sunt in duplicata ratione
laterum homologorum BC. EF.*



DEMONSTRATIO.

Sit $BC < EF$.

Ipsis BC, EF, fiat a tertia propor-
a II. VI. tionalis BG. eritque

b IO.

Def. V.

$BC - BG$ b in duplic. rat. BC / EF .

c I VI.

Atqui $BC - BG$ c \equiv tr: ABC / tr: ABG

d II. V.

Ergo Triang: ABC d \equiv Triang: ABG
in dupl: rat: BC / EF .

Atqui triang. ABG \propto triang. DEF.
ut mox patebit.

Ergo

Ergo triang. ABC — triang. DEF,
in dupl: rat: BC / CF.

Quod autem sit triangulum ABG ∞
DEF, hoc modo videre licet.

In triangulis similibus ABC. DEF.

$$AB — BC = DE / EF. \quad 4. VI.$$

Et permutando.

$$AB — DE = BC / EF. \quad 16. V.$$

Atqui per constructionem.

$$BC — EF = EF / BG.$$

$$\text{Ergo } AB — DE = EF / BG. \quad 11. V.$$

Adeoque triangula ABG. DEF habent angulum B ∞ E, & latera circa illum reciproce proportionalia: Ergo sunt æqualia.

c 15. VI.

Sit deinde BC ∞ EF.

In triangulis similibus ABC. DEF.

$$AB — BC = DE. EF.$$

Atqui BC ∞ EF per propositionem.

$$\text{Ergo } AB ∞ DE.$$

f 14. V.

Adeoque triangula ABC. DEF inter se sunt æqualia.

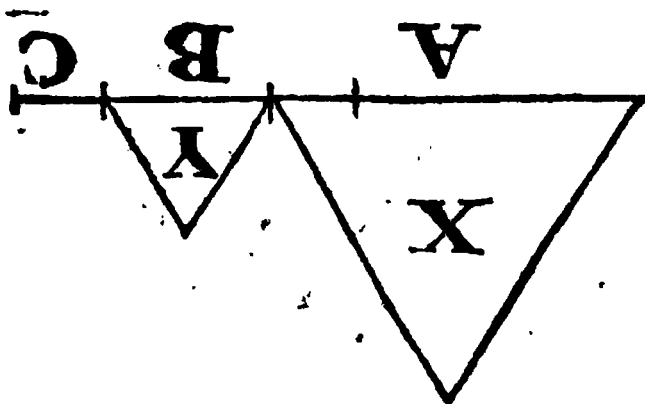
Atqui □ta BC & EF etiam sunt æqualia.

$$\text{Ergo triang. ABC — triang. DEF} \\ = \square BC / \square EF.$$

Atqui ratio Erorum BC. EF. est eadem cum ratione duplicata ipsorum laterum BC. EF, ut supra dictum est ad 10. Def. V.

Ergo triang. ABC — triang. DEF
in dupl: rat: BC / EF.

COROLLARIUM.



Si tres lineæ A. B. C. fuerint proportionales, erit triangulum X supra primam ut triangulum Y priori simile supra secundam, ut prima linea A ad tertiam C.

DEMONSTRATIO.

Tres lineæ A. B. C. sunt proportionales.

a 10.
Def. V.

Ergo A — C^a in duplicata ratione A / B.

b 19. VI.

Atqui X — Y^b etiam in dupl: rat: A / B.

c 11. V.

Ergo X — Y^c = A / C.

Q. D. E.
PRO-

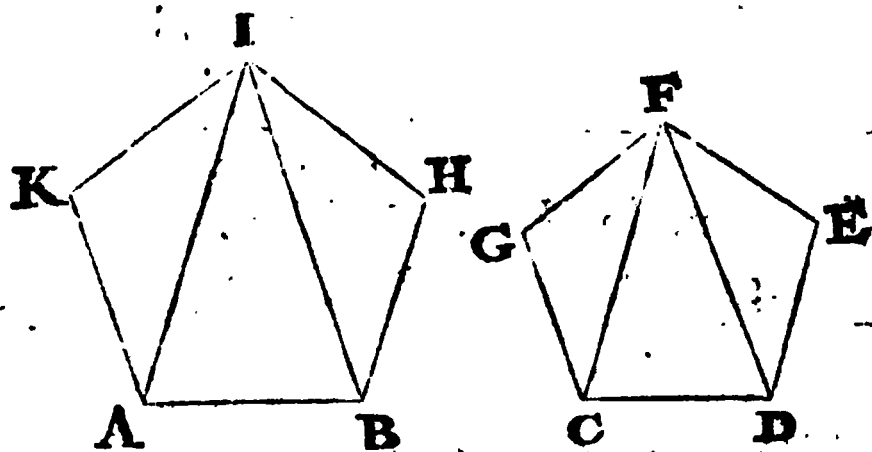
PROPOSITIO XX.

Theor.

14.

1. *Polygona similia ABHIK. CDEFG dividuntur in trian-*
gula, quæ sunt numero æqualia,
similia & totis homologa.

2. *Polygona inter se sunt in ra-*
tione duplicata laterum homologo-
rum AB. CD.



DEMONSTRATIO.

1 Pars: Ductis rectis IA. BA. ut & FC. FD. polygona erunt divisa in trian-

gula. Quod autem illa triangula sint numero æqualia, patet ex Scholio prop. 32. I. quia nim. polygona æque multa habent latera.

Quod sint similia sic probatur.

In

In triangulis IKA. FGC.

Ang. K \propto G. & latera circa illos proportionalia.

a 6. VI.
b 4. VI.

Ergo triangulum IKA. est æquiangulum & simile FGC.

Eodem modo in triangulis IHB FED.

Ang. H \propto E, & latera circa illos proportionalia.

Ergo triangulum IHB est æquiangulum & simile FED.

Deinde ang. KAB \propto GCD.
KAI \propto GCF. /S

IAB \propto FCD.

Simili modo IBA \propto FDC.

Ergo tertius AIB \propto CFD.

Ergo triangulum IAB est æquiangulum & simile FCD.

Quod sint totis homologa, hoc est quod ita sit quodlibet triangulum in uno polygono ad suum correspondens in altero. Ut totum polygonum ad totum polygonum, patebit ex parte secunda.

2 Pars. Triangula IAB, FCD probata sunt similia.

c 4. VI.

Ergo $\frac{IA}{IB} = \frac{FC}{FD} = \frac{AB}{CD}$.

Ut & $\frac{IB}{IA} = \frac{FD}{FC} = \frac{CD}{AB}$.

Tum.

Tum.

Triangula $\triangle IKA$. $\triangle FGC$. sunt in duplicata ratione laterum IA . FC .

hoc est AB . CD .

Et triangula $\triangle IAB$. $\triangle FED$ in duplicata ratione laterum IB . FD .

hoc est AB . CD .

Ut & triangula $\triangle IAB$. $\triangle FCD$ in duplicata ratione laterum AB . CD .

Ergo omnia triangula unius polygoni ad omnia triangula alterius polygoni sunt in duplicata ratione laterum homologorum AB . CD . e 12. VI.

Atqui omnia triangula istorum polygonorum constituunt tota Polygona.

Ergo ipsa polygona sunt in duplicata ratione laterum homologorum. AB . CD .

Cum autem etiam singula triangula unius polygoni ad singula triangula alterius polygoni habent rationem duplicatam eorundem laterum AB . CD ; patet ista triangula totis polygonis esse homologa.

Q. E. D.

COROLLARIUM.

Si fuerint tres rectæ proportionales, polygonum super prima descriptum se habebit ad simile polygonum super secunda;

LII

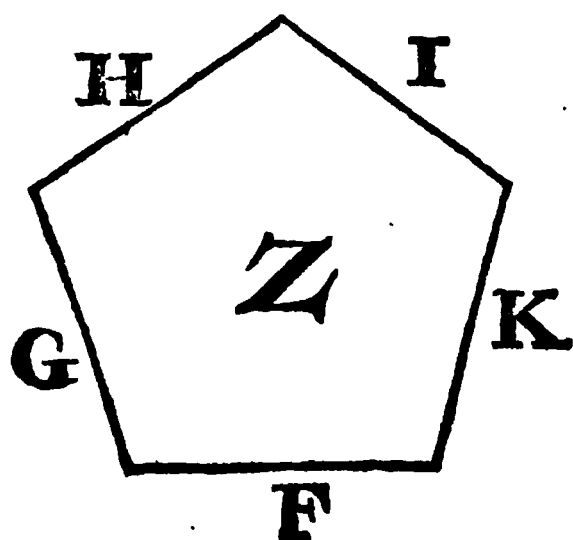
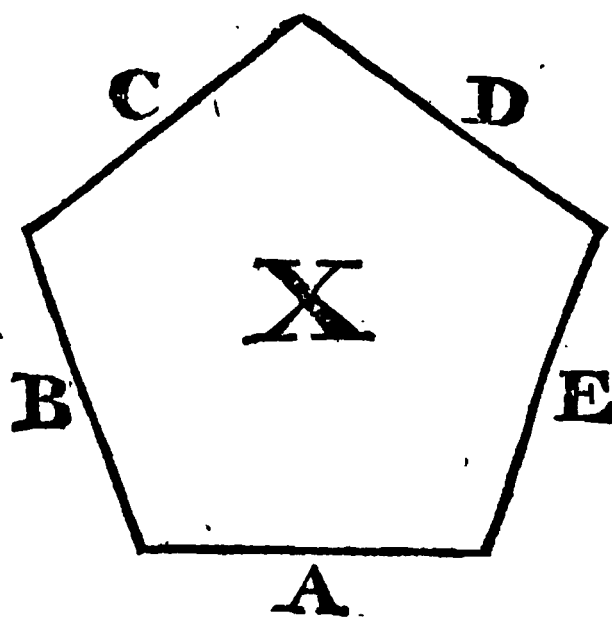
vel

vel polygonum super secunda se habebit
ad polygonum super tertia, ut prima
proportionalis ad tertiam.

DEMONSTRATIO.

Hæc est fere eadem cum demonstra-
tione corollarii præp: præcedentis.

SCHOLIUM.



Com-

Commode hic demonstratur
haud inelegans Theorema.

Similium polygonorum X &
Z, circuitus ABCDE : FGHIK,
cum lateribus homologis A & F,
sunt in eadem ratione.

DEMONSTRATIO.

$$A — F = A / F. \}$$

$$B — G = A / F. \}$$

$$C — H = B / G. \}$$

$$\text{hoc est } A / F. \}$$

$$D — I = C / H. \}$$

$$\text{hoc est } A / F. \}$$

$$E — K = D / I. \}$$

$$\text{hoc est } A / F. \}$$

Def. I. VI.

Ergo per 12. V, additis omni-
bus terminis primis, ut & omni-
bus secundis

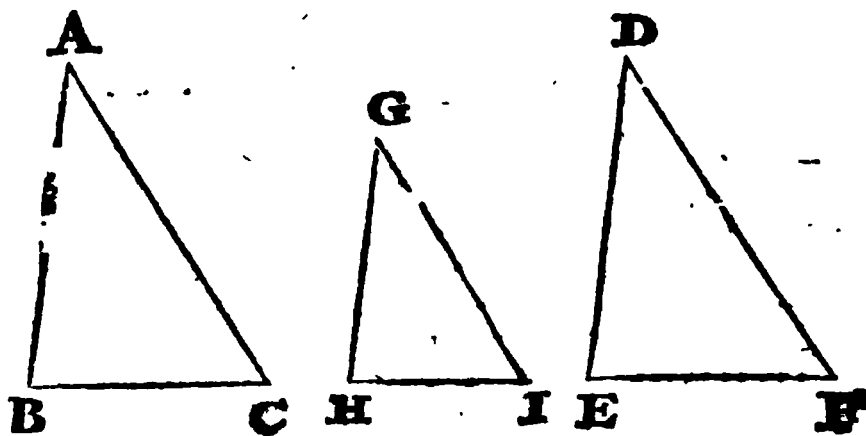
$$\frac{A + B + C + D + E}{\text{hoc est circuitus X}} \sim \frac{F + G + H + I + K}{\text{ad circuitum Z.}} = A / F.$$

Q. E. D.

PROPOSITIO XXI.

Theor. 15

Figuræ ABC. GHI, quæ eîdem figuræ DEF sunt similes; illæ & inter se similes erunt.



DEMONSTRATIO.

Angulus $A \propto D \propto G$.

$B \propto E \propto H$.

$C \propto F \propto I$.

Ergo figuræ ABC. GHI. sunt æquiangulæ; & habent latera circa æquales proportionalia, quia illa habent proportionalia lateribus figuræ DEF. Ergo ^a sunt similes.

a 1 Def.
VL

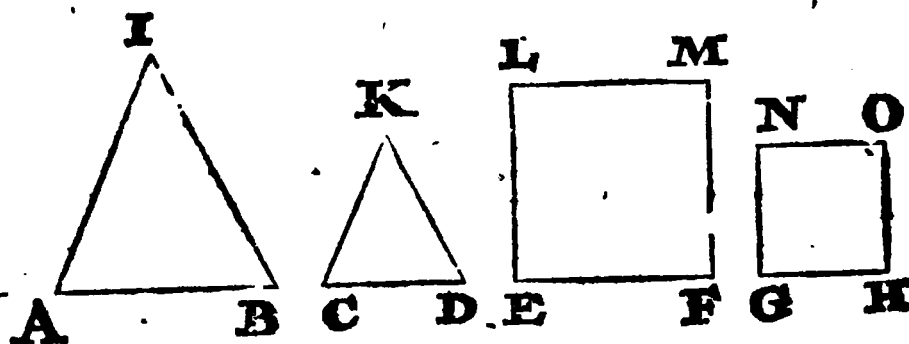
Pro-

PROPOSITIO XXII.

Theor. 16

1. Si quatuor rectæ AB. CD. EF. GH. proportionales fuerint, figurae similes ABI. CDK & LF. NH proportionales erunt.

2. Et si a rectis linea figurae similes descriptæ sint; istæ rectæ proportionales erunt.



DEMONSTRATIO.

P A R S I.

Datæ sunt AB — CD = EF IGH.

Tr. ABI (a) — Tr. CDK in duplic. rat. AB / CD. a 19. VI.

hoc est EF / GH.

Atqui □ LF b — □ NH etiam in d. r. EF / GH. b 20. VI.

Ergo.

Tr. ABI (c) — Tr. CDK — □ LF, □ NH. c 11. V.

P A R S II.

AB — CD in subdup. rat. Tr. ABI / Tr. CDK.

hoc est □ LF / □ NH.

Atqui EF — GH etiam in subd. r □ LF / □ NH

Ergo.

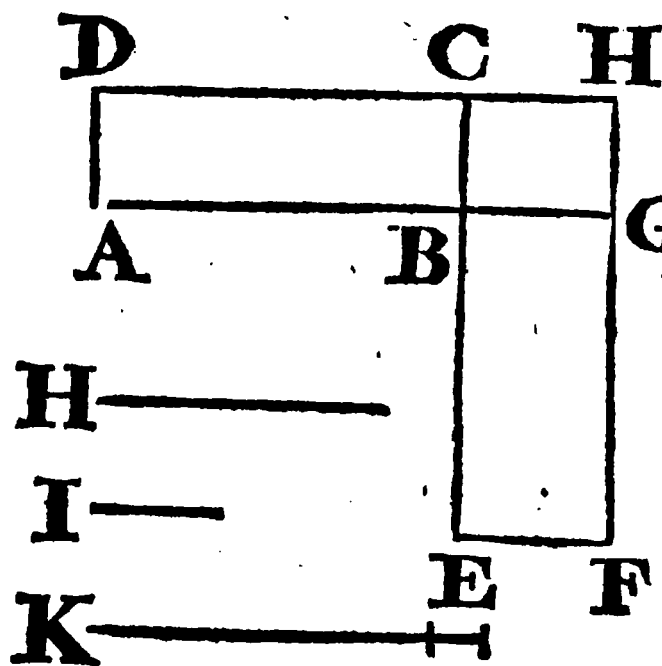
AB — CD = EF / GH

L 11 3

Pro.

Theor. 17

PROPOSITIO. XXIII.



*Æqui-
angula
parallelo-
gramma
AB. BF.
inter se
habent
rationem,
composi-
tam ex
rationi-*

bus laterum AB ad BG & CB ad BE.

DEMONSTRATIO.

Fiat $AB \text{ — } BG = H$ quælibet / I.

Et $CB \text{ — } BE = I$ / K.

Erit ratio H ad K composita ex rationi-
bus AB ad BG & CB ad BE. vide dicta
ad 5 Def. VI.

Demonstrandum ergo est esse paralle-
logr. $AC \text{ — } BF = H / K$.

Quod sic probo.

$AC \text{ — } BH = (a) AB / BG$.

$BH \text{ — } BF (a) = CB / BE$.

$H \text{ — } I = (b) AB / BG$.

$I \text{ — } K (b) = CB / BF$.

Ergo $AC \text{ — } BH (c) = H / I$.

$BH \text{ — } BF = I / K$.

Ergo per 11. V.

$AC \text{ — } H = BF / K$.

Et permutando 16. V.

$AC \text{ — } BF = H / K$.

Q. E. D.

PRO-

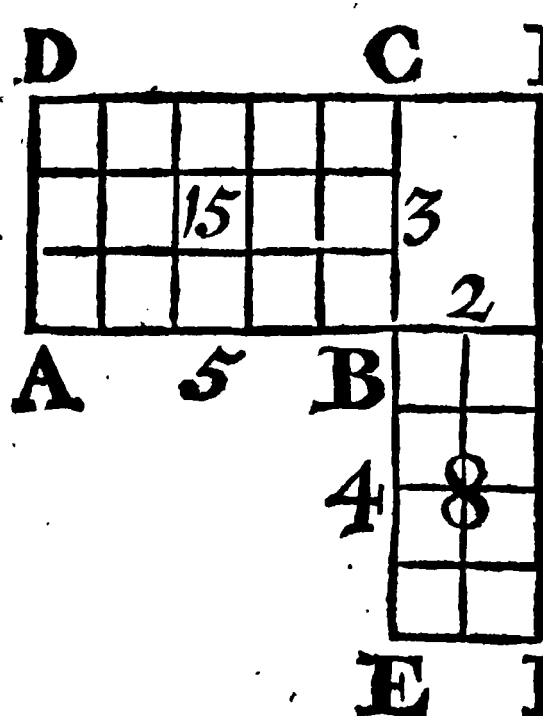
a 7. VI.

b per

constr:

c 11. V.

SCHOLIUM.



H Majori cum
facilitate &
cum apparatu
minori ea-
dem propo-
Gtio demon-
strabitur in
numeris, si
parallelo-
gramma AC.
BF ponantur
rectangula.

Sit \square li AC latus AB \propto 5.

BC \propto 3.

\therefore Erit Area \propto 15.

Deinde \square li BF latus BG \propto 2.

Latus BE \propto 4.

\therefore Erit Area \propto 8.

Ergo \square AC — \square BF = area 15 / ar. 16

Atqui ratio composita ex rationibus 5
ad 2 & 3 ad 4. etiam dat $\frac{15}{8}$ seu ratio-
nem 15 ad 8.

ϵ 1 Def.
II.

ϵ 5. Def.
VI.

Ergo ratio \square AC — \square BF est com-
posita ex dictis rationibus 5 ad 2 & 3 ad 4.

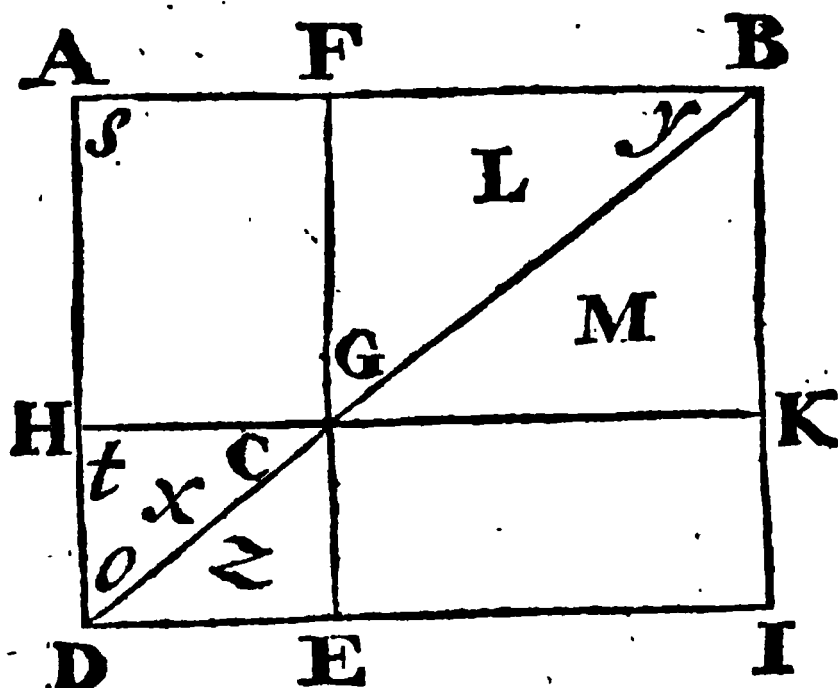
Q. E. D.

Pro.

PROPOSITIO XXIV.

Theor. 18

In omni parallelogrammo AI, parallelogramma EK. HE, quæ circa diametrum sunt, & toti AC & inter se sunt similia.



DEMONSTRATIO.

In triangulis DAB & X.

Angulus O est communis.

$S \propto T.$

Ergo $Y \propto C.$

Adeoque triangula DAB & X sunt æquiangula & similia.

Eodem

a 29. L.

b 32. L.

Eodem modo probatur triangula DIB & Z esse similia.

$$\begin{array}{l} \text{Ergo } AD \text{ --- } DB = HD / DG. \\ \text{Et } DB \text{ --- } DI = DG / DE. \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} AD \text{ --- } DB = HD / DG. \\ DB \text{ --- } DI = DG / DE. \end{array}} \right\} 4. VI.$$

Eritque ex æquo 22. V.

$$AD \text{ --- } DI = HD / DE.$$

Similiter etiam probatur reliqua latera esse proportionalia :
Ergo Parallelogramma AI. HE ,
sunt similia.

Eodem modo etiam demonstratur AI. & FK esse similia.

Ergo HE & FK ^c sunt inter se c 21. VI.
similia.

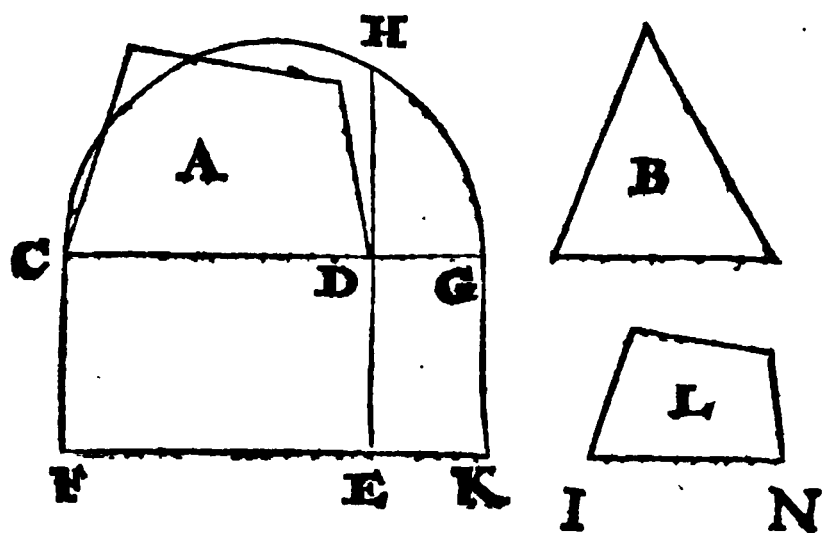
Q. E. D.

M m m

Pro

Probl. 7. PROPOSITIO XXV.

Constituere rectilineum L, quod sit simile similiterque positum dato rectilineo A, & æquale alteri dato B.



CONSTRUCTIO.

1. Ad dati rectilinei A latus
^{a 45. I.} CD, fiat $\square CE \propto^a$ ipsi A.
2. Super DE fiat $\square DK \propto B$.
^{b 44. I.}
3. Inter CD & DG quærat
^{c 13. VI.} media proportionalis DH.
4. Super DH seu ipsi æquali
 IN, describatur rectilineum L
 si-

^a simile ipsi A.

d18. IV.

Dico L esse rectilineum quæ-
situm.

DEMONSTRATIO.

Per constructionem sunt pro-
portionales CD. IN. DG.

Ergo^e $CD : DG = A : L$.

Atqui^f $CD : DG = \square CE : \square DK$.

^e Cor.
19. VI.
^f 1. VI.

Ergo^g $A : L = \square CE : \square DK$.

^g 11. V.

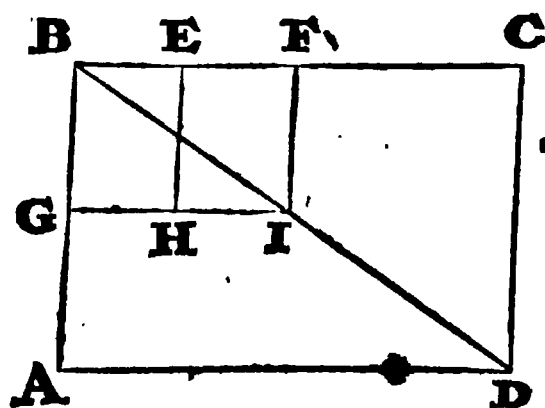
Atqui $A \propto \square CE$.

Ergo $L \propto \square DK \propto B$.

Cum autem L per constructio-
nem sit simile A, patet L esse re-
ctineum quæsitum.

PROPOSITIO XXVI.

Theor. 19



Parallelogramma similia AC. GF, habentia communem angulum B, circa eandem diametrum BD consistunt.

DEMONSTRATIO.

Si adversarius neget diametrum BD transire per I, transeat per aliud punctum H: tum ducta HE parallela BA.

Erit $BA^a - AD = BG / GH$.

Atqui $BA^b - AD = BG / GI$.

a 24. VI
b per
propo.

Ergo $c GH \propto GI$. Pars & totum, quod est absurdum.

c 7. Vel
II. V.

Ergo diameter non transit per H. Eadem autem demonstratio locum habet in omnibus punctis lineæ GI, quandiu sc: inter H & I manet aliquod intervallum: Ergo universim concludendum est diametrum transire per punctum angulare I, adeoque duo parallelogramma AC. GF, circa eandem diametrum consistere.

Q. E. D.

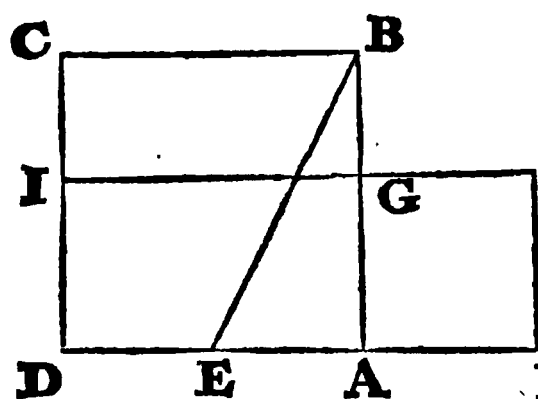
Pro-

PROPOSITIO XXVII. XXVIII. XXIX.

Hæ prolixæ, tyronibus difficiles, & nullius fere usus sunt.

PROPOSITIO XXX.

Prob. 10.



*Proposi-
tam re-
ctam AB
extrema
ac media
ratione se-
care in G.*

CONSTRUCTIO.

a 11. 11.

Divide^a AB in G, ut \square sub tota AB
& minori segmento BG sit \propto \square majoris
segmenti AG.

Dico factum esse quod quæritur.

DEMONSTRATIO.

$$\square AB.BG \propto \square AG.AG.$$

Ergo 17. VI.

Latera sunt reciproce proportionalia. h.e.

$$AB \text{ — } AG = AG / BG.$$

Adeoque^b linea A in media & extre-
ma ratione secta est.

^b 3 Def.
VI.

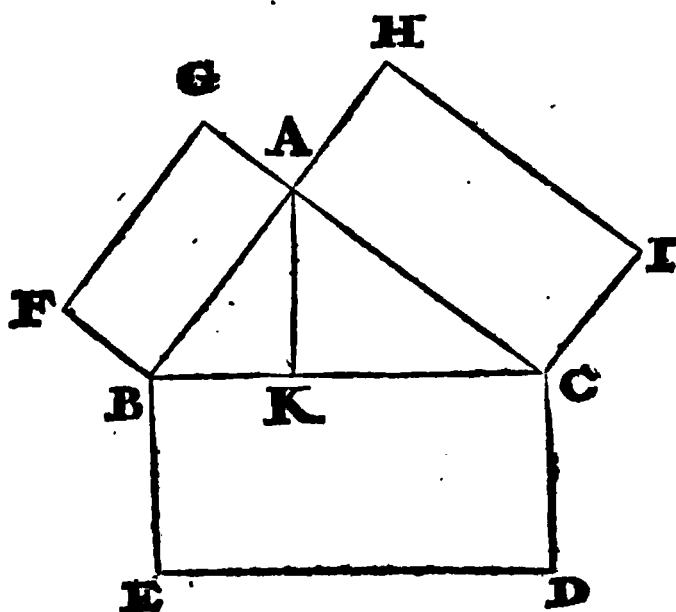
M m m 3

Pro-

Theor. 20

PROPOSITIO XXXI.

Si a lateribus trianguli rectanguli BAC, figuræ similes quæcunque describantur, erit illa quæ angulo recto A opponitur æqualis duabus reliquis simul sumptis.



DEMONSTRATIO.

Figuræ super AB. AC. BC. ponuntur
 a20. | VI. similes; ergo ^a habent inter se rationem
 duplicatam laterum homologorum AB.
 AC. BC, hoc est inter se sunt ut \square ta
 AB. AC. BD.

Atqui \square ta ita sunt inter se ut fit
 b 47. I. \square -BC ^b \propto \square tis AB: AC.

Ergo figura super BC \propto figuris super
 AB. AC. Scho.

SCHOLIUM I.

Quod in prop. 47. I. demonstratum est de solis quadratis hic universim applicatur quibuslibet polygonis similibus.

SCHOLIUM II.

Potest hæc propositio generaliter, ut etiam involvat prop. 47. I. hoc modo demonstrari.

Sunt proportionales per 2 Cor. 8. VI.
BC. AC. CK Ut & BC. BA. BK.

Ergo per Coroll. 20. VI.

Fig. ab BC — Fig. ab AC = BC / CK.
Fig. ab BC — Fig. ab BA = BC / BK.

Et invertendo.

CK — BC = Fig. ab AC / fig. ab BC.
BK — BC = Fig. ab BA / fig. ab BC.

Erit per 2. V..

BK — KC — BC = Fig. ab AB —
Fig. ab AC. / Fig. ab BC.

Atqui BK — KC ∞ BC.

Ergo Fig. ab AB & AC ∞ Fig. ab BC.

Quare si istæ figuræ sunt quadrata, erit prop. 47. I.

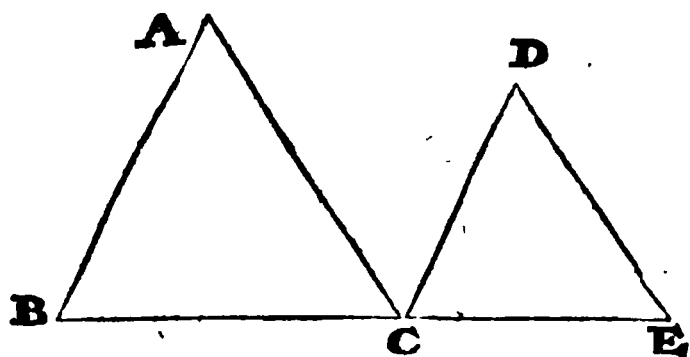
Si vero aliæ figuræ similes erit 31. VI.

PRO-

Theor. 21

PROPOSITIO XXXII.

*Si duo triangula ABC. DCE
ad angulum C conjuncta, duo la-
tera AB. AC habeant parallela
lateribus DC. DE. & latera circa
angulos A. D. proportionalia; tum
reliqua illorum latera BC. CE,
unam facient lineam rectam.*



DEMONSTRATIO.

a 19. I. Angulus A \propto ACD, propter
parallelas AB. DC.

Angulus D \propto ACD, propter
parallelas AC. DE.

Ergo ang. A \propto D.

Cum autem latera circa angu-
los A & D sint proportionalia,
erit

erit triang. ^b ABC æquiangulum ^{b 6. VI.}
triang. DCE.

Adeoque ang. ABC \propto DCE)
Ang. A \propto ACD. A.

Ang. A & ABC \propto toti ACE.)
ACB ACB A.

Tres ang. A. ABC. ACB \propto
duobus ACB. ACE.

c Atque tres A. ABC. ACB \propto ^{c 32. I.}
2 Rectis.

Ergo etiam duo ACB. ACE
 \propto 2 Rectis.

Adeoque BC. CE sibi invicem
a jacebunt in directum.

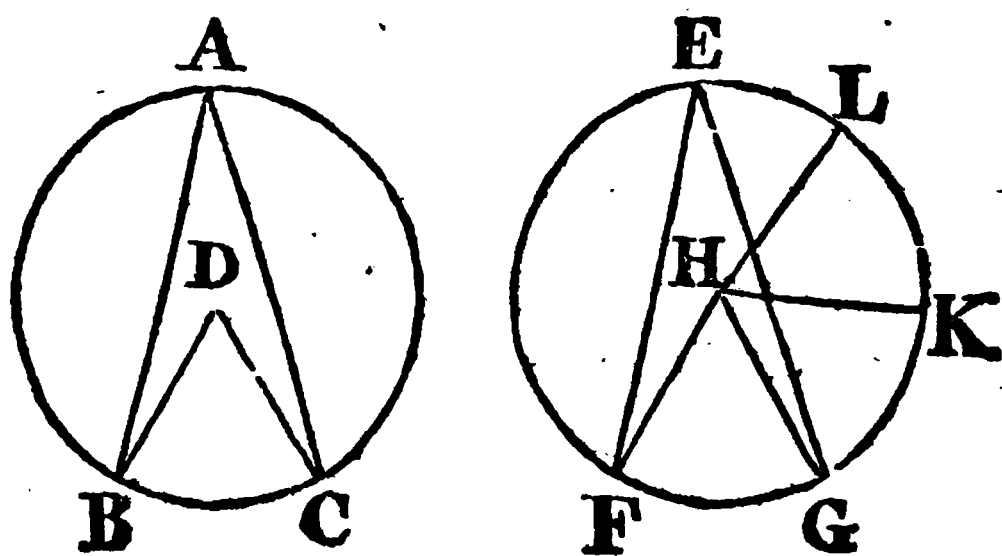
d 14. I.

Theor-22

PROPOSITIO XXXIII.

1. In æqualibus circulis anguli sive ad peripheriam A & E , sive ad centra D & H , sunt in eadem ratione cum arcibus quibus insistent BC . FG .

2. Et Sectors BDC . FGH , eandem cum arcibus habent rationem.



DEMONSTRATIO.

PARS I.

Si anguli D & H ad centra sint æquales; erunt arcus BC , & FG etiam (26. III.) inter se æquales.
Fiat

Fiat jam angulus $GHK \propto FHG$ adeoque FHK duplus FHG hoc est BDC .

Tum arcus GK erit $\propto FG$ (per eandem 26. III) & totus FGK duplus ipsius FG hoc BC .

Eodem modo si fiat arcus $KHL \propto GHK$ s. $FHG. \propto BDC$ adeoque FHL triplus BDC , etiam probabitur arcum $FGKL$ esse triplum arcus BC .

Ergo hinc universim concludimus si anguli $D.$ & $H.$ sint æquales, esse arcus $BC.$ FG æquales: Si anguli D & H sint inæquales, etiam arcus esse inæquales, & hoc juxta quam libet multiplicationem. ut nim. si H sit duplus D etiam arcus FK sit duplus BC : si angulus H sit triplus $D.$ & arcum $FGKL$ & ipsius BC sit triplus: & sic in infinitum: id quod idem est ac angulos cum arcubus esse in eadem ratione.

Et quia anguli $A. E.$ sunt semis-

ses angulorum $D. H.$ etiam illi cum arcubus eandem habebunt rationem.

P A R S 2.

Hæc ex prima parte facile deducitur. Sectorum $QBC. HFG$: anguli G & H sunt æquales: ergo arcus $BC. FG$: & latera $DB. DC.$ æqualia $HF. HG$: ergo si superponantur congruent: Ergo Sētores $DBC. HFG$ erunt æquales.

Similiter si angulus GHK sit $\propto FHG$: sētores congruent, adeoque Sētor $GHK \propto$ sētori FHG hoc BDC : Ergo sētor FHK duplus erit sētoris FHG s. BDC .

Eodem modo si sit angulus HL triplus D , erit arius $FGKL$ triplus BC : adeoque Sētor $HLKG$ triplus sētoris BDC : sic in infinitum. Q. E. D.

F I N I S.

1117.2